

Векторное пространство

Опр. Мн-во V - векторное мн-во, а его эл-ты - векторы, если определены две операции:

$$1) \text{ сложение векторов: } \forall a, b \in V: (a, b) \mapsto c, c \in V$$

2) умножение вектора на скаляр:

$$\forall a \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}: (a, \lambda) \mapsto d, d \in V$$

(Обозн. $a \cdot \lambda = d$)

и выполняются аксиомы векторного мн-ва:

$$1) \text{ ассоциативность } a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$2) \text{ коммутативность } a + b = b + a$$

$$3) \exists 0 \in V: a + 0 = a \quad \forall a \in V$$

(существование нулевого эл-та)

$$4) \exists b \in V: a + b = 0 \quad \forall a \in V \text{ (Обозн. } b = -a)$$

(существование противоположного эл-та)

$$5) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

$$6) (\lambda \mu)a = \lambda(\mu a)$$

$$7) \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

$$8) \exists 1 \in \mathbb{R}: 1 \cdot a = a \quad \forall a \in V$$

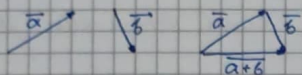
(существование единичного эл-та)

Примеры векторных мн-в:

I. Радиус-векторы - векторы, исходящие из одной заданной точки O



II. Свободные векторы (их можно двигать параллельным переносом)



III. Столбцы длины n

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^n$$

Операции:

$$1) \quad a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \lambda a = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad -a = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$$

IV. Строки длины n

$$a = (a_1, \dots, a_n); \quad b = (b_1, \dots, b_n) \quad \mathbb{R}^n$$

Операции:

$$1) \quad a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$2) \quad \lambda a = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$0 = (0, \dots, 0); \quad -a = (-a_1, \dots, -a_n)$$

Зам. Если в III или IV $n=1$, то $\mathbb{R} = \mathbb{V}$,
Этот столбец (строка) — скаляр

V. Матрицы размерности m на n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Операции:

$$1) \quad A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

VI. Полиномы степени не выше n

$$P(t) = p_0 t^n + p_1 t^{n-1} + \dots + p_{n-1} t + p_n$$

Операции:

$$1) \quad P(t) + Q(t) = (p_0 + q_0) t^n + (p_1 + q_1) t^{n-1} + \dots + p_n + q_n$$

$$2) \quad \lambda P(t) = \lambda p_0 t^n + \lambda p_1 t^{n-1} + \dots + \lambda p_{n-1} t + \lambda p_n; \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$0 = 0 \cdot t^n + 0 \cdot t^{n-1} + \dots + 0 \cdot t + 0$$

$$-P(t) = -p_0 t^n - p_1 t^{n-1} - \dots - p_{n-1} t - p_n$$

Контрпример для степени n (почему не выполняется для полиномов степени n):

$$\text{Пусть } n=4; \quad P(t) = 2t^4 + 3t^2$$

$$Q(t) = -2t^4 + 1$$

$$\text{Тогда } P(t) + Q(t) = 3t^2 + 1 \notin \mathbb{V}$$

VII. Мы во всех полиномах

Линейные комбинации векторов

V - в.п. ; $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$

$$\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$$

α - линейная комбинация в-в $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Оп. Мн-во ненулевых в-в $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ линейно зависимо (ЛЗ), если среди них найдётся вектор $\alpha_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n \lambda_i \alpha_i$ для некоторых $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Пример:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - линейно зависимы, если, например, $\beta = \alpha + \gamma + \delta$, где $\alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

Лемма:

В-ны $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} : \lambda_i \neq 0 \quad (*)$$

(не все λ_i равны 0)

Док-во:

$\Rightarrow$ (от противного): Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - ЛЗ и выполняется (*). Тогда найдётся такое $\lambda_k \neq 0$, что $\alpha_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n \lambda_i \alpha_i \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n$ - ЛЗ, противоречие

$\Rightarrow$ Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - ЛЗ $\Rightarrow \alpha_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i$, где не все $\lambda_i = 0$; Тогда $\exists \lambda_1$ такое, что $\lambda_1 \alpha_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0$ ■

Лемма:

В-ны $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - линейно независимы $\Leftrightarrow$ (ЛНЗ)

$\Leftrightarrow$ любой в-р, линейно выражающийся через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, линейно выражается единственным образом

Док-во:

$\Rightarrow$ (от противного): Пусть некоторый в-р β линейно выражается через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ не единственным образом:

$$(1) \beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n \quad (\lambda_i \neq \mu_i)$$

$$(2) \beta = \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_n \alpha_n$$

Вычтем (2) из (1):

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1) \alpha_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \alpha_n \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n - \text{ЛЗ, противоречие}$$

$\Leftarrow$ (от противного): Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - ЛЗ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \alpha_i = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_{i-1} \alpha_{i-1} + \lambda_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + \lambda_n \alpha_n$$

Также $\alpha_i = \alpha_i$ (выраж. сам через себя), противоречие

Лекция 2

19.09

Теорема о замене:

Пусть каждый в-р ЛНЗ системы в-в $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ линейно выражается через $\beta_1, \dots, \beta_k$. Тогда $l \geq k$

Док-во: (от противного) Пусть $\varepsilon < k$

Возьмём $a_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_\varepsilon v_\varepsilon$

$a_1 \neq 0$, тогда $\lambda_1 \neq 0$ (хотя бы один из коэффициентов λ_i не равен 0)

$$\text{Тогда } v_1 = \frac{a_1}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_\varepsilon}{\lambda_1} v_\varepsilon$$

Т.е. v_1 выражается через $a_1, v_2, \dots, v_\varepsilon$

Возьмём $a_2 = \lambda'_1 v_1 + \dots + \lambda'_\varepsilon v_\varepsilon$

$$a_2 = \lambda'_1 \cdot \frac{a_1}{\lambda_1} - \lambda'_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \lambda'_1 \frac{\lambda_\varepsilon}{\lambda_1} v_\varepsilon + \lambda'_2 v_2 + \dots + \lambda'_\varepsilon v_\varepsilon$$

Тогда $v_2 = \dots$, т.е. v_2 выраж. через $a_1, a_2, v_3, \dots, v_\varepsilon$

на i -ом шаге v_i выраж. через $a_1, \dots, a_i, v_{i+1}, \dots, v_\varepsilon$

на ε -м шаге v_ε выраж. через $a_1, \dots, a_\varepsilon$

Т.е. любой v -н $a_1, \dots, a_k$ линейно выраж.

через $a_1, \dots, a_\varepsilon \Rightarrow a_1, \dots, a_k$ - ЛЗ,

противоречие ■

Размерность в.н. и его базис

Опр. Набор в-в $e_1, \dots, e_n$ наз-ся базисом в.н. V ,

если $\forall$ в-н $v \in V$ может быть единственным

образом представлен в виде $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e_i$,
 $\alpha_i \in \mathbb{R}$

Числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$ - координаты в-на v в

базисе $e_1, \dots, e_n$, где n - размерность

в.н. V

(Обозн. $\dim V = n$)

Лемма:

Пусть $\dim V = n$. Тогда $a_1, \dots, a_m$ ЛЗ - с

базисом $\Leftrightarrow m = n$, $a_1, \dots, a_m$ - ЛНЗ

Док-во:

① Пусть $a_1, \dots, a_n$ - базис

Тогда по опред. базиса $\exists$ ЛНЗ в-в

Произвольные в-на $b_1, \dots, b_n \in V$; по опред.

базиса $b_1, \dots, b_n$ линейно раскладываются

по в-нам $a_1, \dots, a_n$

По т. о замене $m \geq n$

По опред. размерности $\forall (n+1)$ в-на ЛЗ $\Rightarrow$

$\Rightarrow m \leq n \Rightarrow m = n$

② По опред. размерности

Лемма:

Пусть V - в.н.; $\dim V = n$; $a_1, \dots, a_k$ - ЛНЗ

Тогда $\exists a_{k+1}, \dots, a_n$: $a_1, \dots, a_n$ - базис

Док-во:

Т.к. $\dim V = n$, то $\exists b_1, \dots, b_n$ - ЛНЗ

Рассмотрим посл-тву $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n$ ($k+n$ в-в)

Эта посл-тву - ЛЗ

Проверим b_i , будет ли он выражаться

через $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n$

Получим b_i , который будет выражаться

через $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n$

То v_i линейно выраж. через $k+n-1$ в-р.

Исключаем v_i из посл-ти

Тогда v_j и выражаем через $k+n-2$ в-р

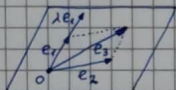
...

Получаем набор ЛНЗ в-р - n штук

Примеры в.н.:

I. Трёх-векторы на n -ти

$$\dim V = 2$$



e_1 и e_2 - ЛНЗ $\Leftrightarrow$ они не лежат на одной прямой (или параллельных прямых)

$$e_1 \text{ и } e_2 - \text{ЛЗ} \Leftrightarrow e_1 = \lambda e_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e_1 \text{ коллинеарен } e_2$$

Любые ≥ 3 в-ра на n -ти - ЛЗ

II. В n -ве ($\dim V = 3$) - 3 ЛНЗ в-ра

e_1, e_2, e_3 - ЛЗ, если лежат в одной n -ти

III. (IV) Столбцы длины n (аналогично строки)

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \quad \dim \mathbb{R}^n = n$$

$$\alpha = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$\text{Базис: } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dots; \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - координаты в-ра α в

базисе $e_1, \dots, e_n$

V. Матрицы

$$\dim V = m \cdot n$$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \dots i\text{-я строка}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

j -й столбец.

$$A = \alpha_{11} \cdot E_{11} + \alpha_{12} \cdot E_{12} + \dots + \alpha_{21} \cdot E_{21} + \dots + \alpha_{mn} \cdot E_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot E_{ij}$$

VI. Полиномы степени не выше n

$$P(t) = p_0 t^n + p_1 t^{n-1} + \dots + p_{n-1} t + p_n$$

$$t^n, t^{n-1}, \dots, t, 1 - \text{ЛНЗ} \Rightarrow \text{Базис}$$

$p_0, p_1, \dots, p_n$ - координаты в этом базисе

Изоморфизм векторных n -в.

Пусть $V - n$ -в, $\dim V = n$, $e_1, \dots, e_n$ - базис

Тогда $\forall \alpha \in V: \alpha = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - координаты в-ра α в базисе $e_1, \dots, e_n$

Пусть $\beta \in V: \beta = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$

Тогда справедливы след. рав-ва:

$$1) \alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) e_n$$

$$2) \lambda \alpha = \lambda \alpha_1 e_1 + \dots + \lambda \alpha_n e_n$$

Для заданного базиса $e_1, \dots, e_n$ определим координатное отображение $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n: \varphi(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - координаты в-ра α в базисе $e_1, \dots, e_n$

Теорема:

Отображение φ линейно, т.е.

$$\varphi(\lambda \alpha + \mu \beta) = \lambda \varphi(\alpha) + \mu \varphi(\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in V, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

и биективно

Док-во:

Линейность следует из:

$$1) \varphi(\lambda a + \mu b) = \varphi((\lambda a_1 + \mu b_1)e_1 + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n)e_n) = (\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_n + \mu b_n)$$

$$2) \lambda \varphi(a) + \mu \varphi(b) = \lambda(a_1, \dots, a_n) + \mu(b_1, \dots, b_n) = (\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_n + \mu b_n)$$

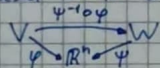
Инъективность следует из опред. базиса

Сюръективность: $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = a \Rightarrow \varphi(a) = (a_1, \dots, a_n)$$

Теорема утверждает, что координатные отображения явл-ся линейными изоморфизмами n -мерного в.п. V на $\mathbb{R}^n$, т.е. n -мерное в.п. V изоморфно $\mathbb{R}^n$ (обозн. $V \approx \mathbb{R}^n$) - координатный изоморфизм

Утв. Если $V \approx \mathbb{R}^n$ и $W \approx \mathbb{R}^n$, то $V \approx W$



Утв. V и W одинаковой размерности изоморфны

Изоморфизм по коор-ту координат

Пусть $e_1, \dots, e_n$ - базис в.п. V ,

$e'_1, \dots, e'_n$ - базис в.п. W

$$a \in V: a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \quad (\text{одни и те же координаты})$$

$$\varphi: V \rightarrow W \quad \varphi(a) = a_1 e'_1 + \dots + a_n e'_n$$

$$\varphi(e_i) = e'_i$$

$$\varphi(a_1 a_1 + a_2 a_2) = a_1 \varphi(a_1) + a_2 \varphi(a_2)$$

Векторные подпространства

Пусть V - в.п.

Тогда в.п. наз-ся ин-ва V_1 такое, что

$$\forall a, b \in V_1, \forall \lambda \in \mathbb{R} : a + b \in V_1, \lambda a \in V_1$$

В.п. само явл-ся в.п.

Лемма:

Пусть V_1 - в.п. в.п. V

Тогда $\dim V_1 \leq \dim V$, при этом

$$\dim V_1 = \dim V \Leftrightarrow V_1 = V$$

Док-во:

Пусть $\dim V = n$, $e_1, \dots, e_n$ - базис V ;

пусть $\dim V_1 = k$, $a_1, \dots, a_k$ - базис V_1

$\forall a_i$ можно выразить через $e_1, \dots, e_n \Rightarrow k \leq n$

Если $k = n$, то в-ки $a_1, \dots, a_k$ - базис V

Тогда $\forall b \in V$ из V можно выразить через

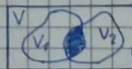
$$a_1, \dots, a_k \Rightarrow V = V_1 \quad \blacksquare$$

Пересечение и сумма в.п.

V - в.п.; V_1, V_2 - в.п. в.п. V

Тогда $V_1 \cap V_2 = \{a \in V \mid a \in V_1, a \in V_2\}$ - пересечение

$V_1 + V_2 = \{a \in V \mid a = a_1 + a_2, a_1 \in V_1, a_2 \in V_2\}$ - сумма



$V_1 \cap V_2$



$V_1 + V_2$

Пересечение и сумма в.п. сами явл-ся в.п.

Теорема:

$$V - \text{в.н.}, \quad V_1, V_2 \subset V$$

$$\text{Тогда } \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Док-во.

$$\text{Пусть } \dim(V_1 \cap V_2) = k, \quad \dim V_1 = \ell, \quad \dim V_2 = m;$$

$$a_1, \dots, a_k - \text{базис } V_1 \cap V_2$$

Дополним $a_1, \dots, a_k$ до базиса V_1 :

$$a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_\ell$$

Дополним $a_1, \dots, a_k$ до базиса V_2 :

$$a_1, \dots, a_k, c_{k+1}, \dots, c_m$$

Докажем, что $a_1, a_k, b_{k+1}, \dots, b_\ell, c_{k+1}, \dots, c_m -$

базис $V_1 + V_2$

$$d_1 \in V_1 : d_1 = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k + \mu_{k+1} b_{k+1} + \dots + \mu_\ell b_\ell$$

$$d_2 \in V_2 : d_2 = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \beta_{k+1} c_{k+1} + \dots + \beta_m c_m$$

$$d_1 + d_2 = (\alpha_1 + \lambda_1) a_1 + \dots + (\alpha_k + \lambda_k) a_k + \mu_{k+1} b_{k+1} + \dots + \mu_\ell b_\ell + \beta_{k+1} c_{k+1} + \dots + \beta_m c_m$$

Допустим, что такое разложение не единственное, т.е. $\exists$ ещё одно:

$$d_1 + d_2 = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_k a_k + \varepsilon_{k+1} b_{k+1} + \dots + \varepsilon_\ell b_\ell + \zeta_{k+1} c_{k+1} + \dots + \zeta_m c_m$$

$$0 = A + B + C, \quad \text{где } A = (\alpha_1 + \lambda_1 - \gamma_1) a_1 + \dots + (\alpha_k + \lambda_k - \gamma_k) a_k$$

$$B = \dots$$

$$C = \dots$$

$$B = -(A + C) \in V_2 ; B \in V_1$$

$$B \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow B = 0$$

$$\text{Аналогично } C = -(A + B), \quad C \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\dim(V_1 + V_2) = k + (\ell - k) + (m - k) = \ell + m - k$$

Прямая сумма в.н.

$$V - \text{в.н.}; \quad V_1, V_2 - \text{в.н. в.н. } V$$

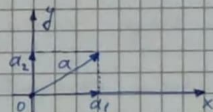
Если $V_1 \cap V_2 = 0$, то $V_1 + V_2$ - прямая сумма (обозн. $V_1 \oplus V_2$)

Примеры:

1) Плоскость

$$V_1 = O_x ; \quad V_2 = O_y$$

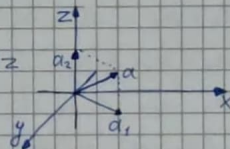
$$a = a_1 + a_2 \in V$$



2) Пространство

$$V_1 = O_{xy} ; \quad V_2 = O_z$$

$$a = a_1 + a_2 \in V$$



Теорема о параллельном проектировании:

$$V - \text{в.н.}; \quad V_1, V_2 \subset V \quad (V = V_1 \oplus V_2)$$

Тогда для $\forall a \in V \exists! a_1 \in V_1, a_2 \in V_2 : a = a_1 + a_2$

~~оператор~~

При этом a_1 наз-ся проекцией в-ра a

на в.н. V_1 параллельно в.н. V_2 ,

a_2 - проекция на в.н. V_2 параллельно в.н. V_1 .

Отображение $p_i : V \rightarrow V_i$, сопоставляющее

в-р a и его проекцию a_i наз-ся оператором проектирования на в.н. V_i

Каждый оператор проектирования P_i яв-ся линейным отображ., т.к. $\forall \alpha, \beta \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$P_i(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda P_i(\alpha) + \mu P_i(\beta)$$

Следующие утв. эквивалентны:

$$1) \alpha \in V_1$$

$$2) \alpha \in V_2$$

$$P_1(\alpha) = \alpha$$

$$P_1(\alpha) = 0$$

$$P_2(\alpha) = 0$$

$$P_2(\alpha) = \alpha_2$$

из опред. суммы $\exists \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2 : \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha \in V$

Докажем единственность разложения (от прот.):

Пусть $\alpha'_1 \in V_1, \alpha'_2 \in V_2 : \alpha = \alpha'_1 + \alpha'_2$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha'_1 + \alpha'_2 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha'_1 = \alpha_2 - \alpha'_2$$

$$\alpha_1 - \alpha'_1 \in V_1$$

$$\alpha_2 - \alpha'_2 \in V_2$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 - \alpha'_1) - (\alpha_2 - \alpha'_2) \in V_1 \cap V_2$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 - \alpha'_1) - (\alpha_2 - \alpha'_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha'_2 = 0; \alpha_2 + \alpha'_1 = 0$$

Т.е. $\alpha_1 = \alpha'_1, \alpha_2 = \alpha'_2 \Rightarrow$ разложение единственно

Линейная оболочка

V -в.н.; $A \subset V$

лн-во $L(A)$, состоящее из всех в-в вида $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_k \alpha_k$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$; $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ наз-ся линейной оболочкой лн-ва A в в.н. V

Общие св-ва линейной оболочки

Лемма:

$$1) A \subset L(A)$$

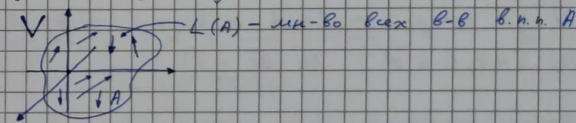
$$2) L(A) - \text{в.н.н. в.н. } V$$

3) $L(A)$ содержится в любом л.н., содержащем A , т.е. $L(A)$ - наименьшее л.н., содержащее A

$$4) L(A) = A \Leftrightarrow A - \text{в.н.н.}$$

$$5) \text{ Если } A \subset B \subset V \Rightarrow L(A) \subset L(B)$$

(доказ-ва из определения)



Лемма:

V -в.н.; $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V$

Тогда $\dim \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \leq k$,

при этом $\dim \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = k \Leftrightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_k - \text{ЛНЗ}$

Док-во:

По определению линейной оболочки ЛЗ в-ва из $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

Получаем $\alpha_1, \dots, \alpha_m - \text{ЛНЗ}$

Каждый в-н $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ линейно зависит

через $\alpha_1, \dots, \alpha_m \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_m - \text{базис}$

Тогда $\dim \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = m \leq k$

Если $\alpha_1, \dots, \alpha_k - \text{ЛНЗ}$, то $\alpha_1, \dots, \alpha_k - \text{базис} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = k$$

Аффинное пространство

= векторное n -во + m -во точек

m -во $\mathcal{A}$, n -то из которого наз-ся точками, наз-ся афф. n -вом, если для него задано в.п. V , называемое афф. в.п. с афф. n -вом $\mathcal{A}$ и отображение $\longrightarrow : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V$, сопоставляющее

любому двум точкам $A, B \in \mathcal{A}$ некоторый в-р $\alpha \in V$, обозначаемый $\overline{AB}$, с началом в т. A и концом в т. B , удов. след. условиям:
 8 аксиом в.п.

9) для каждой т. $A \in \mathcal{A}$ и $\forall \alpha \in V \exists ! B \in \mathcal{A} : \overline{AB} = \alpha$ 10) $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ Пример афф. n -ва:

Столбцы

т. $A \in \mathbb{R}_n^{\text{афф}}$ $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ в-р $\alpha \in \mathbb{R}_n^{\text{вект.}}$ $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

 $\exists ! B = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n + \alpha_n \end{pmatrix} : \overline{AB} = \alpha$ $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n + \alpha_n \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ \vdots \\ x_n - x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 - x_1 \\ \vdots \\ z_n - x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - x_1 \\ \vdots \\ z_n - x_n \end{pmatrix}$

Аффинная система координат.

Координаты точек.

 $(\mathcal{A}, V, \longrightarrow)$ - афф. п.Совокупность, состоящую из точки $O \in \mathcal{A}$ и

базиса $e_1, \dots, e_n$ в афф. в.п. V наз-ся аффинной системой координат.

т. O - начало координат.

Для произвольной т. $M \in \mathcal{A}$ координаты в-ра OM в базисе $e_1, \dots, e_n$ - координаты т. M в афф. с.к.

Отобр. $\Psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное по правилу $\Psi(M) = \varphi(OM)$, $M \in \mathcal{A}$, $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ - коорд.

изоморфизм, соответствующий базису $e_1, \dots, e_n$ - координатное отображ. ~~соответствующее~~, соответствующее афф. с.к.

Теорема: $(\mathcal{A}, V, \longrightarrow)$ - афф. п. $(O, e_1, \dots, e_n)$ - афф. с.к. $\Psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ - коорд. отобр., соответствующее афф. с.к. $O, e_1, \dots, e_n$ $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ - коорд. изом., соотв. базису $e_1, \dots, e_n$ Тогда Ψ - биекция, при этом

$$\Psi(\overline{AB}) = \Psi(A) - \Psi(B)$$

Док-во сводится к т. о биекции φ Пусть $(\mathcal{A}, V, \longrightarrow)$, $(\mathcal{B}, W, \longrightarrow)$ - афф. n -ваПара биективных отобр. $\eta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $\tilde{\eta} : V \rightarrow W$

задает изоморфизм афф. n -ва $(\mathcal{A}, V, \longrightarrow)$ на афф. n -во $(\mathcal{B}, W, \longrightarrow)$, если $\tilde{\eta}$ - изоморфизм в.п. V на в.п. W и $\tilde{\eta}(\overline{AB}) = \tilde{\eta}(A) - \tilde{\eta}(B) \forall A, B \in \mathcal{A}$

Тогда $(\mathcal{A}, V, \longrightarrow)$ и $(\mathcal{B}, W, \longrightarrow)$ - изоморфизм

Пара Ψ и φ задаёт изоморфизм аф. п-ва:

$$\left. \begin{array}{l} \Psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \Rightarrow \text{изоморфизм } (\mathcal{A}, V, \rightarrow) \text{ на } (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \rightarrow)$$

Пара тождественных отображ $I_A: A \rightarrow A$ и

$I_V = I_V: V \rightarrow V$ задаёт тождественный изоморфизм аф. п-ва $(A, V, \rightarrow)$ на себя.

Обращение $f^{-1}: B \rightarrow \mathcal{A}$, $g^{-1}: W \rightarrow V$,

обратное к f и g задаёт обратный изоморфизм аф. п-ва $(B, W, \rightarrow)$ на $(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$

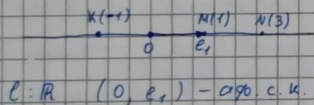
Композиция $Q \circ f: \mathcal{A} \rightarrow G$ и $Q \circ g: V \rightarrow U$ отображений $f: \mathcal{A} \rightarrow B$, $g: V \rightarrow W$, $Q: B \rightarrow G$ и $Q: W \rightarrow U$ показывает транзитивность отображ.

Т.о. изоморфность аф. п. — отношение эквив.

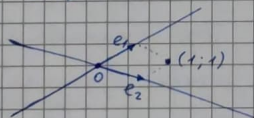
По пред. теореме n -мерное аф. п. изоморфно $\mathbb{R}^n$ и образует один класс эквив.

Пример:

$n=1$



$n=2$



$d: \mathbb{R}^2$

$(0, e_1, e_2) - \text{аф. с. к.}$

Формула перехода от одной аф. с. к. в другую

$(A, V, \rightarrow) - \text{аф. п.}$

(I) $(0, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$

(II) $(0', \bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n)$

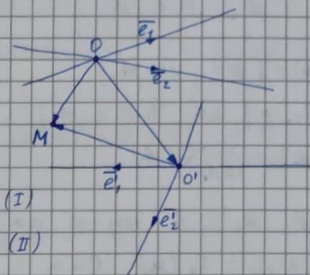
$M \in A$

$(t_1, \dots, t_n) - \text{коорд. M в (I)}$

$(t'_1, \dots, t'_n) - \text{коорд. M в (II)}$

$$\overrightarrow{OM} = t_1 \bar{e}_1 + \dots + t_n \bar{e}_n$$

$$\overrightarrow{O'M} = t'_1 \bar{e}'_1 + \dots + t'_n \bar{e}'_n$$



$\bar{e}'_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) - \text{коорд. в (I)}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$(b_1, \dots, b_n) - \text{коорд. O' в (I)}$

$$\overrightarrow{OO'} = b_1 \bar{e}_1 + \dots + b_n \bar{e}_n$$

$$\begin{aligned} t_1 \bar{e}_1 + \dots + t_n \bar{e}_n &= b_1 \bar{e}_1 + \dots + b_n \bar{e}_n + t'_1 \bar{e}'_1 + \dots + t'_n \bar{e}'_n = \\ &= b_1 \bar{e}_1 + \dots + b_n \bar{e}_n + t'_1 (a_{11} \bar{e}_1 + \dots + a_{n1} \bar{e}_n) + \dots + \\ &\quad + t'_n (a_{n1} \bar{e}_1 + \dots + a_{nn} \bar{e}_n) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} t_1 = a_{11} t'_1 + \dots + a_{n1} t'_n + b_1 \\ \vdots \\ t_n = a_{n1} t'_1 + \dots + a_{nn} t'_n + b_n \end{cases}$$

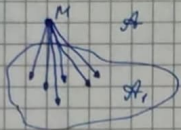
Общая формула: $t = A t' + B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Аффинные подпр-ва

$(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$ - афф. н.

$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, $M \in \mathcal{A}$



$$V_M(\mathcal{A}) = \{ \overline{MN} : N \in \mathcal{A}_1 \}$$

$$V(\mathcal{A}_1) = \{ \overline{KN} : K, N \in \mathcal{A}_1 \}$$

$$V(\mathcal{A}_1) = \bigcup_{K \in \mathcal{A}_1} V_K(\mathcal{A}_1)$$

Мн-во $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ наз-ся афф. подпр-вом, если

$\exists A \in \mathcal{A}_1 : V_A(\mathcal{A}_1) = \text{в.н.н.}$

Лемма:

$(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$ - афф. н., $\mathcal{A}_1$ - афф. н. н. н-во $\mathcal{A}$

Тогда $V(\mathcal{A}_1) = V_M(\mathcal{A}) \quad \forall M \in \mathcal{A}_1$

Док-во:

т. $A \in \mathcal{A}_1$

$V_A(\mathcal{A})$ - в.н.н. н-во V

Зафиксируем произвольную т. $M \in \mathcal{A}_1$

Пусть в-р $\alpha \in V_M(\mathcal{A})$, тогда $\exists$ т. $B \in \mathcal{A}_1 : \overline{MB} = \alpha$

$\overline{AM}, \overline{AB} \in V_A(\mathcal{A})$

Тогда $\alpha = \overline{MB} = \overline{AB} - \overline{AM} \in V_A(\mathcal{A})$

В силу произвольности $\alpha \in V_M(\mathcal{A})$ имеем:

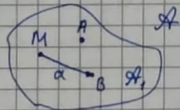
$$V_M(\mathcal{A}) \subseteq V_A(\mathcal{A})$$

В другую сторону:

Пусть в-р $\beta \in V_A(\mathcal{A})$

По опред. афф. н-ва $\exists C \in \mathcal{A} : \overline{AC} = \beta$

Докажем, что $C \in \mathcal{A}_1 : \overline{AC} = \beta$



$$\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MC}$$

$$\overline{MC} = \overline{AC} - \overline{AM} = \beta - \overline{AM} \in V_A(\mathcal{A}) \Rightarrow C \in V_A(\mathcal{A})$$

Значит, $\beta \in V_M(\mathcal{A})$

В силу произвольности $\beta \in V_A(\mathcal{A})$ имеем

$$V_A(\mathcal{A}) \subseteq V_M(\mathcal{A}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A(\mathcal{A}) = V_M(\mathcal{A}) \quad \forall M \in \mathcal{A}_1$$

(в силу произв. M)

Лемма:

$\mathcal{A}$ - афф. н.; $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$

Тогда $\dim \mathcal{A}_1 \leq \dim \mathcal{A}$

При этом, если $\dim \mathcal{A}_1 = \dim \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$

Параметрическое ур-е афф. н.н.

$\mathcal{A}$ - афф. н.; $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$

$\dim \mathcal{A} = n$; $\dim \mathcal{A}_1 = k$

(I) = $(o, e_1, \dots, e_n)$ - афф. с.н. в $\mathcal{A}$

(II) = $(o', e'_1, \dots, e'_k)$ - афф. с.к. в $\mathcal{A}_1$

$M \in \mathcal{A}_1$ $(x_1, \dots, x_n)$ - коорд. в (I)

$(x'_1, \dots, x'_k)$ - коорд. в (II)

$(\beta_1, \dots, \beta_n)$ - коорд. т. o' в (I)

$e'_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ - коорд. e'_i в (I)

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$$

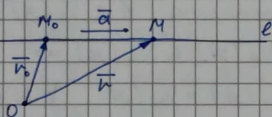
$$\begin{cases} x_i = a_{i1}x'_1 + \dots + a_{ik}x'_k + \beta_i \\ x_n = a_{n1}x'_1 + \dots + a_{nk}x'_k + \beta_n \end{cases}$$

$\overline{O'M} = \overline{O'O} + x'_1 \overline{O'e'_1} + \dots + x'_k \overline{O'e'_k}$ - мн-во точек (разных-векторов) такого вида - афф. н.н. размерности k

Прямые в афф. кр-ве.

1) Прямая

$$n=1; \quad k=1$$



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + a_1 t \\ \vdots \\ x_n = x_n^0 + a_n t \end{cases} \quad \frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \dots = \frac{x_n - x_n^0}{a_n}$$

2) Плоскость

$$n=2; \quad k=1$$

$$M_0(x_0; y_0); \quad \vec{a}(\ell, m)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + m t \end{cases} \quad \frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} \quad (\text{канонич. ур-е прямой})$$

(параметрич. ур-е)

$$m(x - x_0) - \ell(y - y_0) = 0$$

$$Ax + By + C = 0 \quad (\text{общее ур-е прямой})$$

$$A=m; \quad B=-\ell; \quad C=-x_0 m + y_0 \ell$$

$$\vec{a}(-B; A) - \text{направляющий вектор}$$

$$\vec{a}_\perp(A; B) - \text{вектор нормали к прямой}$$

3) Двумерная н-та в n-мерном кр-ве

$$n=n; \quad k=2$$

$$M_0 \in A; \quad \vec{a}, \vec{b} \in V$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v; \quad u, v \in \mathbb{R}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}u + \vec{b}v$$

$$M_0 M = \vec{a}u + \vec{b}v \Rightarrow \overline{M_0 M} = (u, v) - \text{координаты}$$

(M_0, \vec{a}, \vec{b}) - афф. с.к. на н-те

у-е плоскости тремя точками

$$M_0, M_1, M_2 \in A$$

$$\overline{OM_0} = \vec{r}_0; \quad \overline{OM_1} = \vec{r}_1; \quad \overline{OM_2} = \vec{r}_2$$

$$\vec{a} = \overline{M_0 M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

$$\vec{b} = \overline{M_0 M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) + v(\vec{r}_2 - \vec{r}_0)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Общее ур-е плоскости в кр-ве.

$$(n=3; k=2) \quad M_0(x_0; y_0; z_0); \quad \vec{a}(a_1; a_2; a_3); \quad \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v & \rightarrow \text{выражаем } u \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v & \rightarrow \text{выражаем } v \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v & \rightarrow \text{подставляем } u \text{ и } v \end{cases}$$

Получаем:

$$\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} (x - x_0) + \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} (y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{общее ур-е н-ты}$$

Параллельные аф. н.п.

Опр. Аф. н.п. $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ параллельны, если:

1) $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ или $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$

2) $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$ и $\nexists \mathcal{A}_3: \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3$ и
 $\dim \mathcal{A}_3 = \max(\dim \mathcal{A}_1; \dim \mathcal{A}_2) + 1$

Теорема (критерий параллельности аф. н.п.):

$\mathcal{A}$ — конечномерное аф. н.

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$

$\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ параллельны $\Leftrightarrow$ либо $V(\mathcal{A}_1) \subset V(\mathcal{A}_2)$,
 либо $V(\mathcal{A}_2) \subset V(\mathcal{A}_1)$

Вывод:

π -ть π ($\dim \pi = r$) и π' -ть π' ($\dim \pi' = r'$):

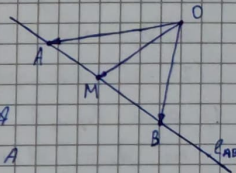
$r \leq r' \leq n-1$ в n -мерном кр-ве нах-ся
 параллельными, если многообразие V (всех
 в-в, лежащих в π) содержится в
 многообразии V' (всех в-в, лежащих в π')

Зам. Если две параллельные π -ти π и π'
 имеют хотя бы одну общую точку M_0 ,
 то одна из π -тей (размерность
 которой меньше) целиком лежит
 в другой

Деление отрезка в данном отношении

$\mathcal{A}$ — аф. н.; $A, B \in \mathcal{A}$ — две точки

Тогда $\forall M \in \ell_{AB}, M \neq B \exists \lambda \in \mathbb{R}: \overline{AM} = \lambda \overline{MB}$,
 где ℓ_{AB} — прямая, проходящая через точки
 A и B.



Пусть $\dim \mathcal{A} = n$

$(O, e_1, \dots, e_n)$ — аф. с. к. в $\mathcal{A}$

$A(a_1, \dots, a_n)$ — координаты т. A

$B(b_1, \dots, b_n)$ — координаты т. B

$M(x_1, \dots, x_n)$ — координаты т. M

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}$$

$$+ \overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM} \quad | \cdot \lambda \text{ такое, что } \overline{AM} = \lambda \overline{MB}$$

$$\overline{OM} + \lambda \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} + \lambda \overline{OB} + \lambda \overline{BM}$$

$$\overline{OM} + \lambda \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AMB} + \lambda \overline{OB} + \lambda \overline{BM}$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{1+\lambda} \overline{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \overline{OB}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{1+\lambda} a_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} b_1 \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{1+\lambda} a_n + \frac{\lambda}{1+\lambda} b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{1+\lambda} a_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} b_1 \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{1+\lambda} a_n + \frac{\lambda}{1+\lambda} b_n \end{cases}$$

Мн-во, состоящее из точек, делящих AB
 в отношении $\lambda > 0$, и из концов A и B
 нах-ся отрезком

Лемма: $\mathcal{A}$ — аф. н.; $A, B \in \mathcal{A}: A \neq B$ — две точки

Тогда $\ell_{AB} = \{M \in \mathcal{A}: \overline{OM} = \alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha + \beta = 1\}$ — мн-во
 точек
 прямой,
 проходящей
 через точки
 A и B

$[AB] = \{M \in \mathcal{A}: \overline{OM} = \alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0\}$ — мн-во
 точек отрезка AB

Гиперплоскость

$\mathcal{A}$ - n -мерное афф. п.

$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A} : \dim \mathcal{A}_1 = n-1 \Rightarrow \mathcal{A}_1$ - гиперпл-ть в n -ве $\mathcal{A}$

Теорема (об уравнении гиперпл-ти):

$(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$ - n -мерное афф. п.

$(I) = (0, e_1, \dots, e_n)$ афф. с.к.

- 1) если $A_1, \dots, A_n, B \in \mathbb{R}, A_1^2 + \dots + A_n^2 = 0$,
то $\mathcal{A}_1 = \{M(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A} : A_1 x_1 + \dots + A_n x_n = B\}$ (*)
- 2) $\forall$ гиперпл-ти в $\mathcal{A}$ задается ур-ем (*),
в котором не все A_i равны 0
- 3) Две гиперпл-ти параллельны $\Leftrightarrow$ все A_i и A'_i
пропорциональны
- 4) Две гиперпл-ти совпадают $\Leftrightarrow$ ур-е вида (*),
задающие эти гиперпл-ти пропорциональны

Док-во:

$$1) A_1, \dots, A_n, B \in \mathbb{R} ; A_1^2 + \dots + A_n^2 = 0$$

$$\mathcal{A}_1 = \{M(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A} : A_1 x_1 + \dots + A_n x_n = B\}$$

Пусть $A_1 \neq 0$; $M_0(\frac{B}{A_1}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{A}_1$

Рассм. $V_1 = \{a = (a_1, \dots, a_n) \in V : A_1 a_1 + \dots + A_n a_n = 0\}$

Ясно, что V_1 - в.н.п. n -ва $V(\mathcal{A}) = V$

$$\text{и } \mathcal{A}_1 = \{M \in \mathcal{A} : M_0 M \in V_1\}$$

Потому $\mathcal{A}_1$ - афф.п.п. n -ва $\mathcal{A}$

Возьмём $\bar{n} = (A_1, \dots, A_n) \in V, n \notin V_1 \Rightarrow L\{\bar{n}\} \cap V_1 = \emptyset$

Пусть $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n) \in V$

$$\text{Положим } t = \frac{A_1 b_1 + \dots + A_n b_n}{A_1^2 + \dots + A_n^2}$$

$$\bar{b} - t\bar{n} = (b_1 - tA_1, \dots, b_n - tA_n)$$

$$A_1(b_1 - tA_1) + \dots + A_n(b_n - tA_n) =$$

$$= A_1 b_1 + \dots + A_n b_n - t(A_1^2 + \dots + A_n^2) = 0 \Rightarrow (\bar{b} - t\bar{n}) \in V_1$$

Т.к. $t\bar{n} \in L\{\bar{n}\}$, то $\bar{b} \in V_1 + L\{\bar{n}\}$

В силу произвольности выбора $\bar{b}$ -ка $\bar{b}$
получаем $V = V_1 + L\{\bar{n}\}$

$$n = \dim \mathcal{A} = \dim V = \dim(V_1 + L\{\bar{n}\}) =$$

$$= \dim V_1 + \dim L\{\bar{n}\} - \dim(V_1 \cap L\{\bar{n}\}) =$$

$$= \dim \mathcal{A}_1 + 1 - 0 \Rightarrow \dim \mathcal{A}_1 = n - 1$$

2) $\mathcal{A}_1$ - гиперпл-ть n -ва $\mathcal{A}$

Тогда $V_1(\mathcal{A}_1)$ - в.н.п. n -ва V

(I) $(0, e_1, \dots, e_n)$ - афф. с.к. в $\mathcal{A}$

(II) $(0, e'_1, \dots, e'_n)$ - афф. с.к. в $\mathcal{A}_1$

Дополним $e'_1, \dots, e'_n$ до базиса $e_1, \dots, e_n$ в.н. V

Рассмотрим афф. с.к. $(0, e'_1, \dots, e'_n)$ в $\mathcal{A}$:

$$M \in \mathcal{A}_1 \Leftrightarrow x'_n = 0$$

Переходим от (II) к (I):

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n + b_1 \\ \vdots \\ x'_n = \alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

- задаём
гиперпл-ть $\mathcal{A}_1$
в афф. с.к.

Лекция 6

3) $(0, e_1, \dots, e_n)$ - афф. с.к. в $\mathcal{A}$

4, 10

$$\mathcal{A}_1 = \{u(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A} : A_1 x_1 + \dots + A_n x_n = B\} \quad (*)$$

$$\mathcal{A}_2 = \{u(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A} : A'_1 x_1 + \dots + A'_n x_n = B'\} \quad (*')$$

Из док-ва 1):

$$V_1(\mathcal{A}_1) = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V : A_1 \alpha_1 + \dots + A_n \alpha_n = 0\}$$

$$V_2(\mathcal{A}_2) = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V : A'_1 \alpha_1 + \dots + A'_n \alpha_n = 0\}$$

Из критерия параллельности афф. н.п.:

$$\mathcal{A}_1 \text{ параллельно } \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow V_1(\mathcal{A}_1) = V_2(\mathcal{A}_2)$$

Если левые части ур-ий $(*)$ и $(*)'$

пропорциональны, то $V_1(\mathcal{A}_1) = V_2(\mathcal{A}_2)$

Обратно:

$$\text{Пусть } V_1(\mathcal{A}_1) = V_2(\mathcal{A}_2)$$

Докажем пропорциональность левых частей:

$$\text{по усл. } A_1^2 + \dots + A_n^2 = 0$$

Пусть $A_1 \neq 0$, тогда $(1, 0, \dots, 0) \in V_1(\mathcal{A}_1) = V_2(\mathcal{A}_2)$

Поэтому $A'_1 \neq 0$

$$\text{Имеем: } (-A_1, 0, \dots, 0, A_1, 0, \dots, 0) \in V_1(\mathcal{A}_1) = V_2(\mathcal{A}_2)$$

$$\text{Тогда } -A'_1 A_1 + A'_1 A_1 = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A'_1} = \frac{A'_1}{1}, \text{ т.е. они пропорциональны}$$

4) [Лемма:

Две гиперпл-ти параллельны $\Leftrightarrow$ они либо

не пересекаются, либо совпадают]

Из леммы: параллельные $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не совпадают $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (*)$ и $(*)'$ не имеют общих решений $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (*)$ и $(*)'$ не пропорциональны

Теорема (условие параллельности в-ра и гиперпл-ти):

Пусть $\mathcal{A}$ — n -мерное афф. н., $n \geq 2$

$$\text{Гиперпл-ть } \mathcal{A}_1 = \{u(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A} : A_1 x_1 + \dots + A_n x_n = B\}$$

Пусть ℓ — прямая в $\mathcal{A}$,

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V(\mathcal{A}) : \alpha \neq 0 \text{ — направляющая}$$

в-ра прямой ℓ

$$\text{Тогда } \dim \ell \leq n-1 = \dim \mathcal{A}_1$$

По критерию: ℓ параллельна $\mathcal{A}_1 \Leftrightarrow V(\ell) \subset V_1(\mathcal{A}_1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha \in V_1(\mathcal{A}_1) \Leftrightarrow A_1 \alpha_1 + \dots + A_n \alpha_n = 0$$

$$\text{Из док-ва 1): } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V(\mathcal{A})$$

$$\alpha \text{ параллелен } \mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \alpha \in V_1(\mathcal{A}_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_1 \alpha_1 + \dots + A_n \alpha_n = 0$$

Евклидово векторное н-во

= векторное н-во + скалярное произведение

Метрика — понятие длины и величины угла

Скалярное произведение

V — в.н.

$$\Phi - \text{я } (\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ — скалярное}$$

произведение, если выполнены след. аксиомы:

$$1) (\alpha, \alpha) \geq 0, \text{ при этом } (\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \forall \alpha \in V$$

$$2) (\lambda \alpha + \mu \beta, \gamma) = \lambda (\alpha, \gamma) + \mu (\beta, \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in V$$

$$3) (\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in V \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Скалярное произведение — ф-я, сопоставляющая двум в-рам число

конечномерное в.н. над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением наз-ся конечномерным евклидовым в.н.

Пусть V — в.н., $\alpha \in V$

Длина (норма), порождённая скалярным произведением в-ра α :

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

Св-ва длины:

$$1) |\alpha| \geq 0$$

$$2) |\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$3) |\lambda \alpha| = |\lambda| \cdot |\alpha| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$4) |(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| \cdot |\beta| \quad (\text{нер-во Коши — Буняковского})$$

$$5) |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (\text{нер-во Мinkовского})$$

Док-во:

$$2) |\lambda \alpha| = \sqrt{(\lambda \alpha, \lambda \alpha)} = \sqrt{\lambda^2 (\alpha, \alpha)} = |\lambda| \cdot |\alpha|$$

$$3) \alpha, \beta \in V; \alpha \neq 0: f(t) = (\alpha t + \beta, \alpha t + \beta) \geq 0$$

$$0 \leq (\alpha t + \beta, \alpha t + \beta) = (\alpha t, \alpha t + \beta) + (\beta, \alpha t + \beta) =$$

$$= t(\alpha, \alpha t + \beta) + (\beta, \alpha t + \beta) =$$

$$= t^2(\alpha, \alpha) + t(\alpha, \beta) + t(\beta, \alpha) + (\beta, \beta) =$$

$$= t^2(\alpha, \alpha) + 2t(\alpha, \beta) + (\beta, \beta)$$

$$D = 4(\alpha, \beta)^2 - 4(\alpha, \alpha)(\beta, \beta) \leq 0$$

$$(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$$

$$(\alpha, \beta)^2 \leq |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Rightarrow |(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| \cdot |\beta|$$

$$4) \alpha, \beta \in V$$

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) =$$

$$= |\alpha|^2 + 2(\alpha, \beta) + |\beta|^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + |\beta|^2 =$$

$$= (|\alpha| + |\beta|)^2$$

$$|\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Rightarrow |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Лемма:

$$V - \text{е. в. н.}; \alpha, \beta \in V$$

$$1) |(\alpha, \beta)| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow \alpha, \beta - \text{линейны}$$

$$2) |\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow \alpha, \beta - \text{сонаправлены}$$

$$3) |\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$$

Ортогональность в-в. Ортонормированность в-в.

Пусть V — е. в. н.

$\alpha, \beta \in V$ — ортогональны, если $(\alpha, \beta) = 0$

(Обозн. $\alpha \perp \beta$)

Лемма (т. Пирсона):

$$V - \text{е. в. н.}; \alpha, \beta \in V$$

$$\text{Тогда } |\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$$

Док-во:

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) =$$

$$= |\alpha|^2 + 2 \cdot 0 + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

Опр. Набор в-в $a_1, \dots, a_n$ — ортогональный, если все эти в-в попарно перпендикулярны, т.е.

$$(a_i, a_j) = 0, \quad a_i \neq a_j$$

Если все эти в-в единичной длины, то $a_1, \dots, a_n$ — ортонормированный набор (ОН)

Т.е. $a_1, \dots, a_n$ — ОН набор $\Leftrightarrow (a_i, a_j) = \delta_{ij}$
↗ символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Лемма:

V — е.в.п. ; $a_1, \dots, a_n$ — ОН набор в-в

Тогда $a_1, \dots, a_n$ — ЛНЗ в-в

Док-во (от противного): Пусть $a_1, \dots, a_n$ — ЛЗ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$ (не все λ_i равны 0)

Тогда $\forall i = 1, \dots, n : 0 = (a_i, 0) = (a_i, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) =$
 $= \lambda_1 (a_i, a_1) + \dots + \lambda_i (a_i, a_i) + \dots + \lambda_n (a_i, a_n) = \lambda_i \Rightarrow$
 $\Rightarrow \forall \lambda_i = 0$, противоречие

Пусть V — е.в.п. ; $a, b \in V : a \neq 0, b \neq 0$

Угол между в-рами a и b наз-ся

число $\varphi \in [0; \pi] : \cos \varphi = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|}$

$\cos \varphi \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} \leq 1$

(но кер-ву

Косинуса — Буняковского)

Ортогонализация Грама — Шмидта

V — е.в.п. ; $e_1, \dots, e_n \in V$

Построим из $e_1, \dots, e_n$ ортонормированный набор в-в $h_1, \dots, h_n$

Построение в-ва h_j :

1) строим вспомогательный $\tilde{h}_j$, перпендикулярный всем в-рам $h_1, \dots, h_{j-1}$

2) нормируем в-в h_j

$$1. \quad h_1: \tilde{h}_1 = \frac{e_1}{|\tilde{h}_1|} ; \quad \tilde{h}_1 = e_1 = v_{11} h_1 ; \quad v_{11} = |\tilde{h}_1|$$

$$2. \quad h_2: \tilde{h}_2 = e_2 - v_{12} h_1 \\ h_2 = \frac{\tilde{h}_2}{|\tilde{h}_2|}$$

$$e_2 = v_{12} h_1 + v_{22} h_2 ; \quad v_{12} = (h_1, e_2) ; \quad v_{22} = |\tilde{h}_2|$$

$$3. \quad h_3: \tilde{h}_3 = e_3 - v_{13} h_1 - v_{23} h_2 \\ \text{ортогональная проекция на } \{h_1, h_2\} \\ h_3 = \frac{\tilde{h}_3}{|\tilde{h}_3|}$$

$$e_3 = v_{13} h_1 + v_{23} h_2 + v_{33} h_3 ; \quad v_{13} = (h_1, e_3) \\ v_{33} = (h_3, e_3) ; \quad v_{33} = |\tilde{h}_3|$$

$$k. \quad h_k: \tilde{h}_k = e_k - v_{k1} h_1 - \dots - v_{k,k-1} h_{k-1} \\ h_k = \frac{\tilde{h}_k}{|\tilde{h}_k|}$$

$$e_k = v_{k1} h_1 + \dots + v_{kk} h_k ; \quad v_{k1} = (h_1, e_k) ; \\ v_{kk} = |\tilde{h}_k|$$

! В любом n -мерном е.в.п. $\exists$ ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$

Матрица Грама

Пусть V - е.в.п. ; $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V$

Матрица Грама - это матрица размерности $k \times k$ вида $G_A = \{g_{ij}\}$, где $i, j = 1, \dots, k$; $g_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$, состоящая из скалярных произведений в-в $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

$$G_A = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & \dots & (\alpha_1, \alpha_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (\alpha_k, \alpha_1) & \dots & (\alpha_k, \alpha_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & \dots & g_{kk} \end{pmatrix}$$

! Матрица $M = \{m_{ij}\}$ наз-ся симметричной, если $\forall m_{ij} = m_{ji}$

! Матрица M неотрицательно определена, если $u^T \cdot M \cdot u \geq 0 \quad \forall u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$,

$$\text{т.е. } (u_1, \dots, u_k) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k1} & \dots & m_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \geq 0$$

Лемма:

V - е.в.п. ; $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V$

Тогда G_A - симметрична и неотриц. определена.

Кроме того, если A - ЛНЗ, то G_A - положительно определена

Док-во:

$$1) g_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_j, \alpha_i) = g_{ji}$$

$$2) u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

$$0 \leq (u_1 \alpha_1 + \dots + u_k \alpha_k)^2 = (u_1 \alpha_1 + \dots + u_k \alpha_k, u_1 \alpha_1 + \dots + u_k \alpha_k) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^k u_i u_j (\alpha_i, \alpha_j) = (u_1, \dots, u_k) \cdot G_A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = u^T \cdot G_A \cdot u$$

Если A - ЛНЗ, то $u_1 \alpha_1 + \dots + u_k \alpha_k \neq 0 \Rightarrow u^T \cdot G_A \cdot u > 0$

Скалярное произведение. Матрица Грама

Лемма:

V - е.в.п. ; $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - базис V

$u, v \in V$: $u = (u_1, \dots, u_n)$

$v = (v_1, \dots, v_n)$

$$\text{Тогда } (u, v) = (u_1, \dots, u_n) \cdot G_A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Док-во:

$$(u, v) = (u_1 \alpha_1 + \dots + u_n \alpha_n, v_1 \alpha_1 + \dots + v_n \alpha_n) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n u_i v_j (\alpha_i, \alpha_j) = u \cdot G_A \cdot v^T$$

Связь между матрицей перехода и матрицей Грама.

Лемма:

V - е.в.п. ; $\dim V = n$; $E = (e_1, \dots, e_n)$ - ОНБ

$\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - набор в-в

Тогда $G_A = A^T \cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} \mathcal{A} / E \end{pmatrix}$ - матрица перехода от E к $\mathcal{A}$

Док-во:

$$g_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$$

Пусть $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}) \in E$; $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn}) \in E$

Тогда $\alpha_i = \alpha_{i1} e_1 + \dots + \alpha_{in} e_n$; $\alpha_j = \alpha_{j1} e_1 + \dots + \alpha_{jn} e_n$

$$\text{Имеем: } g_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_{i1} e_1 + \dots + \alpha_{in} e_n, \alpha_{j1} e_1 + \dots + \alpha_{jn} e_n) =$$

$$= \sum_{k,l=1}^n \alpha_{ki} \cdot \alpha_{lj} \cdot (e_k, e_l) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \cdot \alpha_{kj} = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{j1} \\ \vdots \\ \alpha_{jn} \end{pmatrix} = A^T \cdot A$$

! Матрица $A_{n \times n}$ ортогональна, если $A^T \cdot A = E$

След. Если в условии леммы A - ОН набор,
то A_{nn} - ортогональная матрица

Лемма:

V - в.н.; $E = (e_1, \dots, e_n)$; $A = (a_1, \dots, a_k)$;
 $B = (b_1, \dots, b_k)$

Пусть каждый в-р из A линейно выражается
через E , каждый в-р из B линейно
выражается через A .

Тогда каждый в-р из B линейно выражается
через E .

Кроме того, если A и E - ЛНЗ, то $(B/E) = (A/E) \cdot (B/A)$

Док-во:

1) Пусть $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ в E ; $b_i = (b_{i1}, \dots, b_{in})$ в A

Тогда $a_i = a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n$

$b_i = b_{i1}a_1 + \dots + b_{ik}a_k = b_{i1}(a_{11}e_1 + \dots + a_{1n}e_n) + \dots +$
 $+ b_{ik}(a_{k1}e_1 + \dots + a_{kn}e_n)$

2) $(A/E) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$; $(B/A) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{pmatrix}$

$a_i = a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n$ $(B/E) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kn} \end{pmatrix}$

$b_i = c_{i1}e_1 + \dots + c_{in}e_n$

$b_i = b_{i1}a_1 + \dots + b_{ik}a_k = b_{i1}(a_{11}e_1 + \dots + a_{1n}e_n) + \dots +$
 $+ b_{ik}(a_{k1}e_1 + \dots + a_{kn}e_n)$

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$

Лемма:

V - в.н.; $\dim V = n$

$E = (e_1, \dots, e_n)$ - ОНБ; $A = (a_1, \dots, a_n)$ - базис V ;

$B = (b_1, \dots, b_n)$ - набор в-в из V

Тогда $G_B = (B/A)^T \cdot G_A \cdot (B/A)$

Док-во:

$$(B/E) = (A/E) \cdot (B/A) \Rightarrow (B/E)^T = (B/A)^T \cdot (A/E)^T$$

$$G_B = (B/E)^T \cdot (B/E) = (B/A)^T \cdot \underbrace{(A/E)^T \cdot (A/E)}_{G_A} \cdot (B/A) =$$

$$= (B/A)^T \cdot G_A \cdot (B/A)$$

Ортогональное дополнение

V - в.н.; $V_1 \subset V$

Тогда м-во $V_1^\perp = \{a \in V: (a, b) = 0 \forall b \in V_1\}$ -
ортогональное дополнение к в.н.н. V_1

Лемма:

V - n -мерное в.н.; $V_1 \subset V$, тогда справедливы:

1) $V_1^\perp \subset V$ - в.н.н.

5) $(V_1^\perp)^\perp = V_1$

2) $V_1 \cap V_1^\perp = 0$

3) $\dim V_1 + \dim V_1^\perp = \dim V$

4) $\dim V_1 \oplus V_1^\perp = \dim V$

Док-во:

1) $a, b \in V_1^\perp$, тогда $\forall c \in V_1: (a, c) = 0$; $(b, c) = 0$

$(a+b, c) = (a, c) + (b, c) = 0 \Rightarrow a+b \in V_1^\perp$

$\lambda \in \mathbb{R}; (\lambda a, c) = \lambda(a, c) = 0 \Rightarrow \lambda a \in V_1^\perp \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$V_1^\perp$ - замкнуто $\Rightarrow V_1^\perp \subset V$

2) $\alpha \in V_1 \cap V_2^\perp$, тогда $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

Лекция 8

17.10

3) Пусть $\dim V_1 = k \leq n$; $\dim V_2^\perp = l \leq n$;
 $\dim V = n$

ОНБ в V_1 : $e_1, \dots, e_k$

ОНБ в $V_2^\perp$: $e_{k+1}, \dots, e_{k+l}$

Тогда $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+l}$ — ОН набор в-в

в $V \Rightarrow e_1, \dots, e_{k+l}$ — ЛНЗ в-в в V

Докажем, что $e_1, \dots, e_{k+l}$ — базис V

(от противного): Пусть $\exists \alpha \in V$: $\alpha, e_1, \dots, e_{k+l}$ — ЛНЗ

Применим к этим в-вам процесс ортогонализации Г-м.

Получим $e_1, \dots, e_{k+l}, e'$ — ОН набор

Тогда $(e', e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$

Т.к. $e_1, \dots, e_k$ — базис V_1 , то $(e', v) = 0 \quad \forall v \in V_1$

$$\Downarrow \\ e' \in V_2^\perp$$

Тогда $e_{k+1}, \dots, e_{k+l}, e'$ — ОН набор в-в из $V_2^\perp$ — ЛНЗ

Это противоречит тому, что $e_{k+1}, \dots, e_{k+l}$ — базис $V_2^\perp \Rightarrow \dim V = k + l$

4) Используя построение из п. 3) имеем:

$$\forall \alpha \in V: \alpha = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{k+l} e_{k+l} = \alpha' + \alpha'',$$

где $\alpha' \in V_1$, $\alpha'' \in V_2^\perp$

Тем самым, получили $V = V_1 + V_2^\perp$

Используя п. 2), получаем $V = V_1 \oplus V_2^\perp$

5) Т.к. $\forall \alpha \in V_1: (\alpha, v) = 0 \quad \forall v \in V_2^\perp$,
 то $V_1 \subset (V_2^\perp)^\perp$

Из п. 3) имеем: $\dim V_1 = \dim V - \dim V_2^\perp =$
 $= \dim (V_2^\perp)^\perp$

Опр. Аф. нр-во $(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$, у которого в
 ассоциированном в.п. V задано скалярное
 произведение на-ся метризованным аф. нр-вом

$$\text{Ф-я } \rho: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \mid \rho(A, B) = |AB| = \sqrt{(AB, AB)}$$

$\forall A, B \in \mathcal{A}$ — расстояние между точками
 A и B , порождённое скалярным произведением

Лемма:

ρ яв-ся метрикой, т.е. удовн. след.

условиям $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$:

1) $\rho(A, B) \geq 0$, при этом $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

2) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$

3) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$

Аф. с.к. $(0, e_1, \dots, e_n)$ в n -мерном метризованном
 аф. нр-ве на-ся нр-м ортогональной / декартовой,
 если $e_1, \dots, e_n$ — ОНБ и $\rho(A, B) = |AB| =$
 $= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$, где $(x_1, \dots, x_n)$ — коэф. B
 $(y_1, \dots, y_n)$ — коэф. A

Расстояние от точки до аф. н.п.

Пусть $\mathcal{A}$ — метризованное аф. н.; $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$; $M \in \mathcal{A}$

Тогда $\rho(M, \mathcal{A}_1) = \inf_{A \in \mathcal{A}_1} |MA|$ — расстояние от т. M
 до аф. н.п. $\mathcal{A}_1$

Теорема:

$\mathcal{A}$ - n -мерное метр. афф. н.; $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$; $M \in \mathcal{A}$

Тогда $\exists!$ $M' \in \mathcal{A}_1$: $\rho(M, M') = \rho(M, \mathcal{A}_1)$

При этом $M' \in \mathcal{A}_1$ - ортогональная проекция точки M на афф. н. $\mathcal{A}_1$

Док-во:

$A \in \mathcal{A}_1$ - произвольная точка

Пусть $A' \in V(\mathcal{A}_1)$ - ортогональная проекция в-ра $\alpha = \overline{AM}$ на $V(\mathcal{A}_1)$

Положим, $M' \in \mathcal{A}_1$: $\overline{AM'} = \alpha'$

$$\alpha'' = \overline{M'M} = \overline{AM} - \overline{AM'} = \alpha - \alpha' \in (V(\mathcal{A}_1))^\perp$$

$$\text{по т. Пифагора: } \rho(A, M)^2 = |\overline{AM}|^2 = |\overline{AM'}|^2 + |\overline{M'M}|^2 = \rho(A, M')^2 + \rho(M', M)^2 \Rightarrow \rho(M', M) \leq \rho(A, M)$$

Расстояние от точки до гиперпл-ти.

Теорема:

$\mathcal{A}$ - n -мерное метр. афф. н.

$(0, e_1, \dots, e_n)$ - ортонормальная с.к.

$A_1 x_1 + \dots + A_n x_n + B = 0$ - гиперпл-ть $\mathcal{A}$

$M(x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{A}$

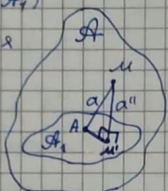
$$\text{Тогда } \rho(M, \mathcal{A}) = \frac{|A_1 x_0 + \dots + A_n x_0 + B|}{\sqrt{A_1^2 + \dots + A_n^2}}$$

Док-во:

$\vec{n}(A_1, \dots, A_n)$ - в-р нормали к гиперпл-ти $\mathcal{A}$

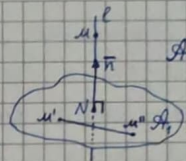
$$\vec{n} \perp \mathcal{A}_1 \Rightarrow A_1(x_1'' - x_1') + \dots + A_n(x_n'' - x_n') = 0,$$

где x_1' и x_1'' - координаты точек M' и M''



$$\ell: M + t\vec{n}; \quad \ell \cap \mathcal{A}_1 = N$$

$$\rho: \begin{cases} x_1 = x_1^0 + A_1 t \\ \vdots \\ x_n = x_n^0 + A_n t \end{cases}$$



$$N: A_1(x_1^0 + A_1 t) + \dots + A_n(x_n^0 + A_n t) + B = 0$$

$$t = \frac{-(A_1 x_1^0 + \dots + A_n x_n^0 + B)}{A_1^2 + \dots + A_n^2}$$

$$\rho(M, \mathcal{A}_1) = \rho(M, N) = |\overline{MN}| = |t \cdot \vec{n}| = |t| \cdot |\vec{n}| = \frac{A_1 x_1^0 + \dots + A_n x_n^0 + B}{\sqrt{A_1^2 + \dots + A_n^2}} \cdot \sqrt{A_1^2 + \dots + A_n^2} = \frac{|A_1 x_1^0 + \dots + A_n x_n^0 + B|}{\sqrt{A_1^2 + \dots + A_n^2}}$$

Пример: расстояние от точки до пл-ти в 3-мерном кр-ве:

$$\text{пл-ть } \alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \notin \alpha$$

$$\vec{n}(A, B, C) \perp \alpha$$

$$\ell: \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$$

$$M_0 K(At, Bt, Ct) = (x_0 + At - x_0, y_0 + Bt - y_0, z_0 + Ct - z_0) \Rightarrow K = (x_0 + At, y_0 + Bt, z_0 + Ct)$$

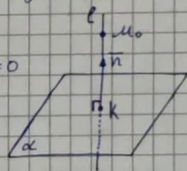
$$|M_0 K|^2 = t^2(A^2 + B^2 + C^2)$$

$$\ell \cap \alpha = K \Rightarrow A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0$$

$$t = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$|M_0 K|^2 = t^2(A^2 + B^2 + C^2) = \frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$|M_0 K| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Непрерывная деформация базиса v -в.

V - в.п. ; $\dim V = n$

B - мн-во всех базисов в V

Зафиксируем базис $E \in B$

Соотавили каждому v -ру $u \in V$ его координаты $(u_1, \dots, u_n)$ в базисе E :

$$u = (u_1, \dots, u_n)$$

Опр. Ф-я $f(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow V$ непрерывна, если соответствующие координаты e -и непрерывны:

$$f_i(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \leq t \leq \beta \quad f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

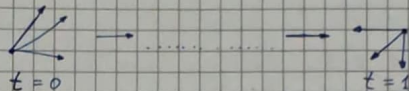
$$0 \leq t \leq 1 \quad u = (u_1, \dots, u_n)$$

t - время

При изменении базиса e -и $f_i(t)$ заменяются их линейными комбинациями и потому остаются непрерывными.

$$\begin{array}{c} E \\ f(t) = f_1(t), \dots \\ \tilde{f}_1(t) = a_{11} f_1(t), \dots, a_{1n} f_n(t) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(t) = a_{n1} f_1(t), \dots, a_{nn} f_n(t) \end{array} \quad \begin{array}{c} \tilde{E} \\ \tilde{f}(t) = \tilde{f}_1(t), \dots \end{array}$$

Опр. Деформация базисов n -ва V наз-ся такое семейство n непрерывных ф-ий $f_1(t), \dots, f_n(t)$, определённых при $0 \leq t \leq 1$, что для $\forall t$ v -ры $f_i(t)$ составляют базис.



Базис $a_1, \dots, a_n$ наз-ся деформируемым в базисе $b_1, \dots, b_n$, если $\exists$ такая деформация базисов $f_1(t), \dots, f_n(t)$, что

$$f_1(0) = a_1, f_2(0) = a_2, \dots, f_n(0) = a_n$$

$$f_1(1) = b_1, f_2(1) = b_2, \dots, f_n(1) = b_n$$

Эта деформация связывает первый базис со вторым

Опр. Пусть $\varphi : t \rightarrow B$

φ непрерывна, если все компоненты

$\varphi_{ij} : t \rightarrow \mathbb{R}$ (компоненты матрицы перехода от базиса E к базису $\varphi(t)$) — непрерывные ф-и

Лекция 9

24.10

Опр. Базисы A и B эквив., если

$\exists$ непрерывная деформация из A в B

Лемма:

Отношение деформируемости явл-ся отношением эквив.

Док-во: из опред.

Каждому базису $A \in B$ соотавили невырожденную матрицу $A \in GL(n)$ ($GL(n)$ - мн-во невырожденных квадратных матриц порядка n) — матрицу перехода от E к A

Теорема:

Пусть A и $B \in B$

Тогда $A \sim B \Leftrightarrow \det(A/B) > 0$

Док-во:

Без ограничения общности будем считать, что E — это базис B (фиксированный базис)

Тогда утв.: $A = (A/B)$ можно деформировать в мн-ве $GL(n)$ в единичную $\Leftrightarrow \det A > 0$

$\Rightarrow$ Пусть $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow GL(n)$ — деформация матрицы A в единичную

Если $\det A < 0$, то $\det \psi(\alpha) = \det A$;

$\det \psi(\beta) = \det E = 1 > 0$

$\psi(\alpha)$ Кроме того, $\det \psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная ф-я

Тогда по т. о промежуточном значении непрерывной ф-и $\exists t_0 \in [\alpha, \beta]: \det \psi(t_0) = 0$

Противоречие с $GL(n)$, т.е. $\det A > 0$

$\Leftarrow$ Пусть $A \sim A'$ (док-ть, что A можно деформировать в единичную матрицу)

$\varphi: [0, 1] \rightarrow GL(n): \varphi(t)$ получена из A

прибавлением к $A^{(i)}$ столбцу $tA^{(j)}$ строки

$A \sim D \sim E \in GL(n)$

С помощью элементарных преобразований столбцов можно сделать не более, чем один диагональный эл-т < 0 .

Т.е., если $\det A > 0$, то все диаг. эл-ты > 0

След. мн-во базисов B состоит из двух классов эквив.

Пример:

$A, A' \in B$

$\det(A'/A) < 0$, если $(A'/A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Если $(A'/A) > 0$, то $A \sim A'$

Опр. При фиксировании базиса $B \in B$ и мн-ва:

$B^+ = \{A \in B: \det(A/B) > 0\}$

$B^- = \{A \in B: \det(A/B) < 0\}$

В.п. ориентированно, если выбран один из классов эквив.

Параллелепипед

V — в.п.; $a_1, \dots, a_k$ — ЛНЗ в V

$\Pi_k(a_1, \dots, a_k) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ — k -мерный параллелепипед, натянутый на в.п. $(a_1, \dots, a_k)$

Если $a_1, \dots, a_k$ — ЛЗ, то $\Pi_k(a_1, \dots, a_k)$ — вырожденный k -мерный параллелепипед.

Объем парал-да:

V — n -мерное в.п., $a_1, \dots, a_k$ — произвольный набор в-в.

Определим индукцией по числу k в-в $a_1, \dots, a_k$ объем $D_k(a_1, \dots, a_k)$ k -мерного парал-да:

1) при $k=1$ $D_1(a_1) = |a_1|$

2) при $k \geq 2$ рассмотрим $\alpha_k'' = \alpha_k - \alpha_k'$,
 где α_k' - ортогональная проекция в-ра α_k
 на $L(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$; α_k'' - высота $\Pi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$
 с основанием $\Pi_{k-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$

Положим, что $D_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = D_{k-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \cdot h(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

Лемма:

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_k - \text{ЛЗ}$$

Док-во (инд. по k):

$$1) k=1 \quad D_1(\alpha_1) = |\alpha_1| = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$$

$$2) (k-1) \rightarrow k$$

$$\Rightarrow 0 = D_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = D_{k-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \cdot h(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{либо } D_{k-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) = 0 \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} - \text{ЛЗ},$$

$$\text{либо } h = 0 \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_k - \text{ЛЗ}$$

$$\Leftarrow \text{Пусть } \alpha_1, \dots, \alpha_k - \text{ЛЗ}$$

Тогда либо α_k линейно выражается через $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = 0, \text{ либо } \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} - \text{ЛЗ} \Rightarrow D_{k-1} = 0$$

Выражение объема параллелепипеда через
 определитель матрицы Грама

Лемма:

V - n -мерное е.в.п.

$\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - ЛНЗ в-ры

$E = (e_1, \dots, e_n)$ - ОН в-ры

E получен из $\mathcal{A}$ методом ортогонализации Т-и

$$\text{Тогда } D(\mathcal{A}) = |\det(\mathcal{A}/E)|$$

Док-во (инд. по k):

$$\alpha_j = \sum_{m=1}^n a_{mj} e_m; \quad A = (\mathcal{A}/E) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

$$k=1: D(\mathcal{A}_1) = |\alpha_1| = |a_{11} e_1| = |a_{11}| = \det A$$

$$(k-1) \rightarrow k: D(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = D(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \cdot h(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} e_i; \quad \alpha_k'' = a_{kk} e_k$$

Тогда α_k' - ортогон. проекция в-ра α_k на
 $L(e_1, \dots, e_{k-1}) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \Rightarrow \alpha_k'' = \alpha_k - \alpha_k' \Rightarrow$

$$\Rightarrow D(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = |\det(\mathcal{A}_k/E)| \cdot |a_{kk} \cdot e_k| =$$

$$= |a_{11} \cdot \dots \cdot a_{k-1, k-1} \cdot a_{kk}| = |\det(\mathcal{A}/E)|$$

Теорема:

V - е.в.п.

$E = (e_1, \dots, e_n)$ - ОН базис

$\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - ЛНЗ базис, линейно выражается
 через E

$$\text{Тогда } D(\mathcal{A}) = |\det(\mathcal{A}/E)|$$

Док-во:

E_0 - ОН базис, полученный из $\mathcal{A}$ методом
 ортогонализации Т-и

Тогда E_0 выражается через E

$$D(\mathcal{A}) = |\det(\mathcal{A}/E_0)| = |\det(E/E_0) \cdot \det(\mathcal{A}/E)| =$$

$$= |\det(E/E_0)| \cdot |\det(\mathcal{A}/E)| = |\det(\mathcal{A}/E)|$$

(E/E_0) - ортогональная матрица

След.

V - е.в.п.; $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ - ЛНЗ базисов $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}$ -р-м $\mathcal{A}$ линейно выражает через $\mathcal{B}$

$$\text{Тогда } \frac{\mathcal{D}(\mathcal{A})}{\mathcal{D}(\mathcal{B})} = \left| \det(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \right| = \frac{|\det(\mathcal{A}/\mathcal{E})|}{|\det(\mathcal{B}/\mathcal{E})|} = \\ = |\det(\mathcal{A}/\mathcal{E})| \cdot |\det(\mathcal{E}/\mathcal{B})|$$

Док-во:

$\mathcal{E}$ - ОН базисов $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$

$$\text{Тогда } \mathcal{D}(\mathcal{A}) = |\det(\mathcal{A}/\mathcal{E})|; \mathcal{D}(\mathcal{B}) = |\det(\mathcal{B}/\mathcal{E})| = \\ = |\det(\mathcal{E}/\mathcal{B})^{-1}| = \frac{1}{|\det(\mathcal{E}/\mathcal{B})|}$$

$$\frac{\mathcal{D}(\mathcal{A})}{\mathcal{D}(\mathcal{B})} = |\det(\mathcal{A}/\mathcal{E})| \cdot |\det(\mathcal{E}/\mathcal{B})| = |\det(\mathcal{A})| \cdot |\det(\mathcal{E}/\mathcal{B})| = \\ = |\det(\mathcal{A}/\mathcal{B})|$$

Теорема:

V - е.в.п.; $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ - ЛНЗ базисов $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$

$$\text{Тогда } \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \sqrt{|\det G_A|}, \quad A = (\mathcal{A}/\mathcal{E})$$

Док-во:

$\mathcal{E}$ - ОНБ

$$\text{Тогда } \mathcal{D}(\mathcal{A}) = |\det(\mathcal{A}/\mathcal{E})|$$

$$G_A = (\mathcal{A}/\mathcal{E})^T \cdot (\mathcal{A}/\mathcal{E})$$

$$\det G_A = \det((\mathcal{A}/\mathcal{E})^T \cdot (\mathcal{A}/\mathcal{E})) = \det(\mathcal{A}/\mathcal{E})^T \cdot \det(\mathcal{A}/\mathcal{E}) = \\ = (\det(\mathcal{A}/\mathcal{E}))^2 = (\mathcal{D}(\mathcal{A}))^2$$

Векторное произведение

V - е.в.п.; $\dim V = 3$

$\alpha, \beta \in V$

Опр. Ф-я $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V : c = [\alpha, \beta] \in V$ —
векторное произведение, если выполнены
след. аксиомы:

$$1) c \perp \alpha; \quad c \perp \beta$$

$$2) \alpha, \beta, c \text{ — коллимит. ориентированный базис (правая тройка в-в)}$$

$$3) |c| = S_{\Delta \alpha \beta} = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot \sin(\angle \alpha \beta)$$

↑
площадь параллелограмма со сторонами α и β

Векторное произведение — ф-я, ставящая
двум в-рам α в соответствие третий в-р.

Св-ва:

$$1) [\alpha \beta, \gamma] = \alpha [\alpha, \beta] = [\alpha, \alpha \beta]$$

$$2) [\alpha, \beta] = -[\beta, \alpha]$$

$$3) [\alpha, \beta] = 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ и } \beta \text{ коллинеарны}$$

$$4) \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ — ОНБ}$$

$$[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}; \quad [\vec{i}, \vec{k}] = \vec{j}; \quad [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$$

$$[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = 0$$

$$5) [\alpha_1 + \alpha_2, \beta] = [\alpha_1, \beta] + [\alpha_2, \beta]$$

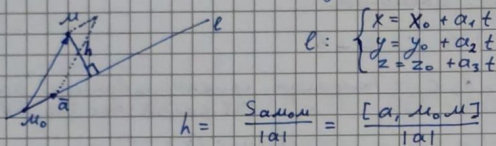
$$\text{Пусть } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k};$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}$$

$$\text{Тогда } [\alpha, \beta] = [\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}, \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}] = \\ = \alpha_1 \beta_1 [\vec{i}, \vec{i}] + \alpha_1 \beta_2 [\vec{i}, \vec{j}] + \alpha_1 \beta_3 [\vec{i}, \vec{k}] + \alpha_2 \beta_1 [\vec{j}, \vec{i}] + \alpha_2 \beta_2 [\vec{j}, \vec{j}] + \alpha_2 \beta_3 [\vec{j}, \vec{k}] + \alpha_3 \beta_1 [\vec{k}, \vec{i}] + \alpha_3 \beta_2 [\vec{k}, \vec{j}] + \alpha_3 \beta_3 [\vec{k}, \vec{k}] =$$

$$+ a_2 b_2 [\vec{i}, \vec{j}] + a_2 b_3 [\vec{j}, \vec{k}] + a_3 b_1 [\vec{k}, \vec{i}] + a_3 b_2 [\vec{k}, \vec{j}] + \\ + a_3 b_3 [\vec{i}, \vec{k}] = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + \\ + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

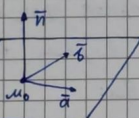
Расстояние от точки до прямой



$$l: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

$$h = \frac{S_{\Delta M_0 M}}{|a|} = \frac{[a, M_0, M]}{|a|}$$

Плоскость в 3-мерном кр-ве.

$$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v \end{cases}$$


$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$\vec{n} = (A, B, C) = [\vec{a}, \vec{b}] - \text{в-р нормали к п-ти } \alpha$$

Смешанное произведение

Опр. Смешанным произведением в-в $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

в 3-мерном ориентированном е.в.п.

наз-ся число: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$

(скалярное кр-е векторного кр-я на в-р)

Теорема:

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - неколлинеарные в-ры,

V - объем паралл-да, натянутого на

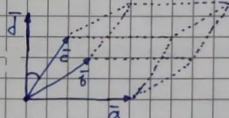
эти в-ры. Тогда $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = V$

При этом, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - положит. ориентированы; $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - отриц. ориентированы.

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - коллинеарны, то $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

Док-во:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - неколлинеарны



$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{d}, \vec{c}) = |\vec{d}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\hat{dc}) = \\ = |\vec{d}| \cdot h, \text{ где } h = |\vec{c}| \cdot \cos(\hat{dc}) - \text{высота паралл-да}$$

$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = V$ - объем паралл-да

В-ры $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - полож. ориент.

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - тоже ориент. полож., то в-ры $\vec{d}$ и $\vec{c}$ направлены в одно и то же полуш-во относительно п-ти $(\vec{a}, \vec{b})$

Тогда угол $\hat{dc}$ - острый, $\cos \hat{dc} > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ориент. отриц., то в-ры $\vec{d}$ и $\vec{c}$ направлены в разные полуш-ва относительно п-ти $(\vec{a}, \vec{b})$; тогда угол $\hat{dc}$ - тупой, $\cos \hat{dc} < 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - коллинеарны, докажем, что $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - коллинеарны $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - л.з. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0$, при этом не все α, β, γ равны 0

Пусть $\gamma \neq 0$, тогда $c = -\frac{\alpha}{\gamma}a - \frac{\beta}{\gamma}b$

$$(a, b, c) = (d, c) = (d, -\frac{\alpha}{\gamma}a - \frac{\beta}{\gamma}b) =$$

$$= -\frac{\alpha}{\gamma}(d, a) - \frac{\beta}{\gamma}(d, b) = 0$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ 0 \end{matrix} \\ (d \perp a; d \perp b)$$

Если $\gamma = 0$, то $\alpha a + \beta b = 0 \Rightarrow a, b$ - коллинеарны

Тогда $(a, b, c) = (d, c) = 0$

($d=0$, т.к. век. н-е коллинеарны. В-в равно 0)

След.

1) a, b, c - компланарны $\Leftrightarrow (a, b, c) = 0$

2) $(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(b, a, c) =$
 $= -(c, b, a) = -(a, c, b)$

3) $(a, b, c) = ([a, b], c) = (a, [b, c])$

4) $(a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, c) = \beta_1 (a, b_1, c) + \beta_2 (a, b_2, c)$
 (смеси. н-е линейно по каждому аргументу)

Смешанное н-е в ОНБ (i, j, k - ОНБ)

Пусть $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

$\vec{c} = c_1 i + c_2 j + c_3 k$

Тогда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) =$

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k,$

$c_1 i + c_2 j + c_3 k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Геометрический смысл определителя

$V = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} V, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - коллинеар. опред.} \\ -V, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - отриц. опред.} \end{cases}$

Произведения в-в:

1) скалярное $(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \perp b$

2) векторное $[a, b] = 0 \Leftrightarrow a \parallel b$

3) смешанное $(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow a, b, c$ - компланарны

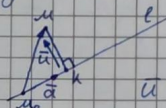
Двойное векторное н-е.

$[a, [b, c]] \neq [[a, b], c]$

Утв. $[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$

$([[a, b], c] = b(a, c) - a(b, c))$

Задача: Найти у-е перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую ℓ



$\ell: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

$u = [[\vec{a}, \vec{m}_0 M], \vec{a}]$

Полноеждество Якоби:

$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$

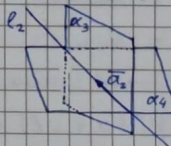
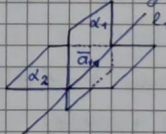
Векторное н-е двух векторных н-ий

$[a, b], [c, d] = b(a, c, d) - a(b, c, d)$

$\ell_1: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 & (\alpha_1) \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 & (\alpha_2) \end{cases}$

прямые на пересечении двух плоскостей

$\ell_2: \begin{cases} A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 & (\alpha_3) \\ A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = 0 & (\alpha_4) \end{cases}$



$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$\alpha: \ell_1, \ell_2 \in \alpha; M_0 \in \alpha$ (прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в плоскости α)

$\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_0$ — нормали к плоскостям $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_0$

$\vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2], [\vec{n}_3, \vec{n}_0]$ — нормаль к плоскости α
 $\parallel \vec{a}_1 \quad \parallel \vec{a}_2$

γ_α — сечение α в 3-мерном пространстве

$$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 u + \beta_1 v \\ y = y_0 + \alpha_2 u + \beta_2 v \\ z = z_0 + \alpha_3 u + \beta_3 v \end{cases} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\alpha} u + \vec{\beta} v$$

$$\vec{r}_0 - \vec{r} + \vec{\alpha} u + \vec{\beta} v = 0$$

$$(\vec{r}_0 - \vec{r}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\parallel \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}$$

Лекция 11

7.11

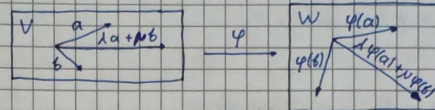
линейные и аффинные отображения

линейные отображения в.п. и их св-ва

Пусть V, W — в.п.

Отобр. $\varphi: V \rightarrow W$ линейно, если $\forall \alpha, \beta \in V$ и

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \varphi(\lambda \alpha + \mu \beta) = \lambda \varphi(\alpha) + \mu \varphi(\beta)$$



$L(V, W)$ — мн-во всех лн. отображений из в.п. V в в.п. W .

Пусть $\varphi \in L(V, W)$

Тогда мн-во $\text{Im } \varphi = \varphi(V) = \{\varphi(\alpha) : \alpha \in V\} \subset W$ — образ φ ; мн-во $\text{ker } \varphi = \varphi^{-1}(0) = \{\alpha \in V : \varphi(\alpha) = 0\} \subset V$ — ядро φ

Для двух отображений $\varphi, \psi \in L(V, W)$ и

чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ определим отношение

$(\lambda \varphi + \mu \psi): V \rightarrow W$ такое, что

$$(\lambda \varphi + \mu \psi)(\alpha) = \lambda \varphi(\alpha) + \mu \psi(\alpha)$$

I — тождественное отображение ($I: V \rightarrow V$)

Лемма:

V, W — в.п.; $\varphi, \psi \in L(V, W)$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Тогда справедливы утв.:

- 1) если $V_1 \subset V$, то $\varphi(V_1) \subset W$; в частности, $\text{Im } \varphi$ — в.п. в в.п. W
- 2) если $W_1 \subset W$, то $\varphi^{-1}(W_1) \subset V$; в частности, $\text{ker } \varphi$ — в.п. в в.п. V
- 3) φ — инъективно $\Leftrightarrow \text{ker } \varphi = 0$
- 4) φ — сюръективно $\Leftrightarrow \varphi$ переводит ЛНЗ в ЛНЗ

$$5) (\lambda\varphi + \mu\varphi) \in L(V, W)$$

Док-во:

3) $\Rightarrow$ Пусть φ - инъективно

Докажем, что $\ker \varphi = 0$:

$$\text{Пусть } \alpha \neq 0 \Rightarrow \varphi(\alpha) \neq \varphi(0) = 0 \Rightarrow \ker \varphi = 0$$

$$\Leftarrow \text{Пусть } \alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha - \beta \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(\alpha - \beta) \neq 0 \Rightarrow \varphi(\alpha) - \varphi(\beta) \neq 0 \Rightarrow$$

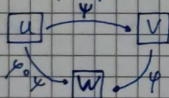
$$\Rightarrow \varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$$

Зам. Используя н. 5) и лемма, легко показать, что $L(V, W)$ явл-ся в.п. с операциями сложения отображений и умножения на скаляры

Теорема:

Пусть U, V, W - в.п.; $\varphi \in L(U, V)$; $\psi \in L(V, W)$

Тогда $(\psi \circ \varphi) \in L(U, W)$



Теорема:

V, W - в.п.; $\varphi \in L(V, W)$ - биекция

Тогда $\exists \varphi^{-1} \in L(W, V)$

Теорема (о размерности ядра и образа):

V, W - в.п.; $\dim V < \infty$ (конечномерное)

$\varphi \in L(V, W)$ Тогда $\dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{Im} \varphi) = \dim V$

Док-во:

Пусть $\dim(\ker \varphi) = l$; $\dim V = n$

Тогда $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ - базис $\ker \varphi$

Дополним этот базис до базиса n -ва V :

$\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha'_{l+1}, \dots, \alpha'_n$

Докажем, что $\varphi(\alpha'_{l+1}), \dots, \varphi(\alpha'_n)$ - базис $\operatorname{Im} \varphi$

Пусть $\beta \in \operatorname{Im} \varphi$ ($\beta \in W$)

Тогда $\exists \alpha \in V$: $\varphi(\alpha) = \beta$

Т.к. $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha'_{l+1}, \dots, \alpha'_n$ - базис V , то

$$\exists \lambda_i \in \mathbb{R}: \alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha'_n$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \beta &= \varphi(\alpha) = \varphi(\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_l \alpha_l + \lambda_{l+1} \alpha'_{l+1} + \dots + \lambda_n \alpha'_n) = \\ &= \underbrace{\varphi(\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_l \alpha_l)}_{= 0 \text{ (т.к. } \alpha_1, \dots, \alpha_l \in \ker \varphi)} + \varphi(\lambda_{l+1} \alpha'_{l+1} + \dots + \lambda_n \alpha'_n) = \\ &= \lambda_{l+1} \varphi(\alpha'_{l+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(\alpha'_n) \end{aligned}$$

Докажем единственность разложения (от хот.):

Пусть $\beta = \lambda_{l+1} \varphi(\alpha'_{l+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(\alpha'_n) + \varphi(\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_l \alpha_l)$, $\mu_i \neq 0$

Вспомогательное уравнение:

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_{l+1} - \mu_{l+1}) \varphi(\alpha'_{l+1}) + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \varphi(\alpha'_n) + \\ &+ \underbrace{\varphi((\lambda_1 - \mu_1) \alpha_1 + \dots + (\lambda_l - \mu_l) \alpha_l)}_{= 0} \end{aligned}$$

$$0 = \varphi((\lambda_{l+1} - \mu_{l+1}) \alpha'_{l+1} + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \alpha'_n) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_i = \mu_i$ (т.к. $\alpha'_{l+1}, \dots, \alpha'_n$ - дополнительное базиса $\ker \varphi$ до базиса V ($\alpha'_{l+1}, \dots, \alpha'_n \notin \ker \varphi$)),
хотимое

Тогда $\varphi(\alpha'_{l+1}), \dots, \varphi(\alpha'_n)$ - базис $\operatorname{Im} \varphi$;

$$\dim(\operatorname{Im} \varphi) = n - l = \dim V - \dim(\ker \varphi)$$

Формула линейного отображения
координат базиса

V, W - в.п. ; $\dim V = n$; $\dim W = m$

$E = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V

$\bar{E} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m)$ - базис W

Тогда:

$$(*) \begin{cases} \bar{x}_1 = e_{n1} x_1 + \dots + e_{m1} x_n \\ \vdots \\ \bar{x}_m = e_{n1} x_1 + \dots + e_{mn} x_n \end{cases} \Leftrightarrow X = LX$$

Определим $\varphi: V \rightarrow W$: $\alpha = (x_1, \dots, x_n) \in V$ в

базисе $E \rightarrow \varphi(\alpha) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \in W$ в

базисе $\bar{E}$ с координатами $(*)$

Теорема:

При выполнении всех оговоренных выше условий, справедливы след. утв.:

- 1) отображение φ линейно
- 2) $\forall$ линейное отображ. может быть задано в базисах E и $\bar{E}$ формулами $(*)$
- 3) Для заданного лн. отображ. и фиксированных E и $\bar{E}$ формулы $(*)$, задающие лн. отображ. определены единственным образом

Док-во:

- 1) Пусть $\alpha, \beta \in V$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$; $\beta = (y_1, \dots, y_n)$

Тогда $\varphi(\alpha) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$

$$\begin{aligned} \lambda LX + \mu LY &= \lambda \bar{X} + \mu \bar{Y} = \lambda \varphi(\alpha) + \mu \varphi(\beta) \\ \parallel \\ L(\lambda X + \mu Y) &= \varphi(\lambda \alpha + \mu \beta) \\ \Rightarrow \varphi(\lambda \alpha + \mu \beta) &= \lambda \varphi(\alpha) + \mu \varphi(\beta) \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

2) $\varphi \in L(V, W)$

$$\varphi(e_i) = e_{1i} \bar{e}_1 + \dots + e_{mi} \bar{e}_m = \sum_{j=1}^m e_{ji} \bar{e}_j$$

Пусть $\alpha \in V$: $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ в E

Тогда $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{j=1}^m e_{ji} \bar{e}_j = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n e_{ji} x_i\right) \cdot \bar{e}_j \end{aligned}$$

Т.о., координаты в $\bar{E}$ выражаются след.

$$\text{образом: } \bar{x}_j = \sum_{i=1}^n e_{ji} x_i; \quad - \text{ это формула } (*)$$

3) $\varphi \in L(V; W)$ - задается ф-ми $(*)$

Тогда $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

$$\varphi(e_i) = (e_{1i}, \dots, e_{mi}) = \sum_{j=1}^m e_{ji} \bar{e}_j$$

Тогда $L = \left(\frac{\varphi(E)}{E} \right)$ - матрица линейного отображ. φ

$$X = LX$$

$$\varphi(E) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

Лекция 12

14.11

Индукцированное отображение $\bar{\varphi}$

$(X, V, \rightarrow), (B, W, \rightarrow)$ - аф. н-ва

Пусть $f: X \rightarrow B$ - произвольное отображ.

$M \in \mathcal{A}$

определим $\overline{f}_M: V \rightarrow W : \overline{f}_M(\alpha) = \overline{f(M)f(M+\alpha)}$,
где $\alpha \in V$, $M+\alpha = N \in \mathcal{A}$ ($\alpha = \overline{MN}$) (вектор)

Лемма (о композиции отображений):

$(C, U, \rightarrow), (A, V, \rightarrow), (B, W, \rightarrow)$ - афф. нр-ва

$g: C \rightarrow A$; $f: A \rightarrow B$

$M \in C$

Тогда $\overline{(f \circ g)}_M = \overline{f}_{g(M)} \circ \overline{g}_M$

Док-во:

Пусть $\alpha \in U$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \overline{(f \circ g)}_M(\alpha) &= \overline{(f \circ g)(M)(f \circ g)(M+\alpha)} = \\ &= \overline{f(g(M))f(g(M+\alpha))} = \overline{f(g(M))f(g(M) + g(M)\alpha)} = \\ &= \overline{f}_{g(M)}(\overline{g(M)g(M+\alpha)}) = (\overline{f}_{g(M)} \circ \overline{g}_M)(\alpha) \end{aligned}$$

Аффинные отображения

$(A, V, \rightarrow), (B, W, \rightarrow)$ - афф. нр-ва

Отобр. $f: A \rightarrow B$ наз-ся аффинным, если

$\exists M \in \mathcal{A} : \overline{f}_M: V \rightarrow W$ линейно

Лемма:

$(A, V, \rightarrow), (B, W, \rightarrow)$ - афф. нр-ва

$f: A \rightarrow B$ - афф. отобр.

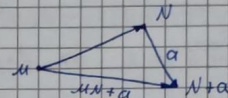
Тогда $I_M = I_N \quad \forall M, N \in \mathcal{A}$

Док-во:

Т.к. f - афф. отобр., то $\exists M \in \mathcal{A} : \overline{f}_M: V \rightarrow W$

Пусть $N \in \mathcal{A}$ и для некоторого $\alpha \in V$ выполняется след.:

$$\begin{aligned} \overline{f}_N(\alpha) &= \overline{f(N)f(N+\alpha)} = \overline{f(M+\overline{MN})f(M+\overline{MN}+\alpha)} = \\ &= -\overline{f(M)f(\overline{MN})} + \overline{f(M)f(M+\overline{MN}+\alpha)} = \\ &= -\overline{f}_M(\overline{MN}) + \overline{f}_M(\overline{MN}+\alpha) = \overline{f}_M(-\overline{MN}+\overline{MN}+\alpha) = \\ &= \overline{f}_M(\alpha) \end{aligned}$$



Лемма (о композиции афф. отображений):

$(C, U, \rightarrow), (A, V, \rightarrow), (B, W, \rightarrow)$ - афф. нр-ва

$g: C \rightarrow A$; $f: A \rightarrow B$ - афф. отображения

Тогда $(f \circ g): C \rightarrow B$ - афф. отобр. и

$$\overline{(f \circ g)} = \overline{f} \circ \overline{g}$$

Лемма (об обратном отображении к аффинному):

$(A, V, \rightarrow), (B, W, \rightarrow)$ - афф. нр-ва

$f: A \rightarrow B$ - афф. отобр.

Тогда f - биективно $\Leftrightarrow \overline{f}$ - биективно

Док-во:

$\Rightarrow$ Пусть $f: A \rightarrow B$ - биективное афф. отобр.

$M \in \mathcal{A}$

$$\text{Тогда } f^{-1} \circ f = I_A; \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

По лемме о композиции:

$$(\overline{f^{-1}})_{f(M)} \circ \overline{f}_M = I_V; \quad \overline{f}_M \circ (\overline{f^{-1}})_{f(M)} = I_W$$

Тем самым, $(\overline{f^{-1}}) = (\overline{f}_M)^{-1} = (\overline{f})^{-1}$ и

$\overline{f}$ - биекция; $(\overline{f^{-1}})_{f(M)}$ линейно $\Rightarrow f^{-1}$ - афф. отобр.

(=) Пусть $\bar{f}$ - биективно

Пусть $\varphi = (\bar{f})^{-1}$ - линейно; $M \in \mathcal{A}$

Определим $g: B \rightarrow \mathcal{A}$: $g(A) = M + \varphi(\overline{f(M)A})$,
 $A \in B$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } (f \circ g)(A) &= f(g(A)) = f(M + \varphi(\overline{f(M)A})) = \\ &= f(M) + \bar{f}(\varphi(\overline{f(M)A})) = f(M) + (\bar{f} \circ \varphi)(\overline{f(M)A}) = \\ &= f(M) + \overline{f(M)A} = A \Rightarrow f \circ g = I_B \Rightarrow \\ &\Rightarrow f - \text{биекция} \end{aligned}$$

Пусть $f^{-1} = g$; $N \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(N) &= g(f(N)) = M + \varphi(\overline{f(M)f(N)}) = \\ &= M + \varphi(\overline{f(MN)}) = M + (\varphi \circ \bar{f})(\overline{MN}) = \\ &= M + MN = N \Rightarrow g \circ f = I_A \end{aligned}$$

Формулы афф. отображения в а.с.к.

$(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$, $(B, W, \rightarrow)$ - афф. кр-ва

$\dim \mathcal{A} = n$; $\dim B = m$

(I) $= (O, E)$; $E = (e_1, \dots, e_n)$ - а.с.к. в $\mathcal{A}$

(II) $= (O', E')$; $E' = (e'_1, \dots, e'_m)$ - а.с.к. в B

$$(*) \begin{cases} X'_1 = e_{11}X_1 + \dots + e_{m1}X_n + v_1 \\ \vdots \\ X'_m = e_{m1}X_1 + \dots + e_{mn}X_n + v_m \end{cases} \Leftrightarrow X' = LX + B$$

Теорема:

Пусть $f: \mathcal{A} \rightarrow B$ задано формулами (**)

Тогда:

1) Отобр., заданное в а.с.к. (I) и (II) формулами (**)-аффинное

2) Каждое афф. отображ. может быть задано в а.с.к. (I) и (II) формулами (**)

3) $\bar{f}$ -ли (***) определены однозначно, или этим $L = \left(\frac{\bar{f}(E)}{E} \right)$, $(v_1, \dots, v_m) = \bar{f}(O)$ в а.с.к. (II)
 матрица индуцированного (и аффинного) отображ.-я

Док-во:

1) $f: \mathcal{A} \rightarrow B$ задано $\bar{f}$ -ли (**)

$\alpha \in V$; $M \in \mathcal{A}$: $OM = \alpha = (x_1, \dots, x_n)$ в E

$\bar{f}(\alpha) = (x'_1, \dots, x'_m)$ в E'

Пусть $M = (x_1, \dots, x_n)$ в а.с.к. (I);

$\bar{f}(M) = (x'_1, \dots, x'_m)$ в а.с.к. (II)

Координаты т. M - это коорд-ты в-ра α ;

по формулам (***) коорд-ты

$\bar{f}(O) = (v_1, \dots, v_m)$ в (II)

Т.к. $\bar{f}_0(\alpha) = \bar{f}(O) + \bar{f}(OM) = \bar{f}(O) + \bar{f}(M)$

Тогда $X'_j = x_j - v_j$ или $j = 1, \dots, m$;

по $\bar{f}$ -ли (***) $X'_j = \sum_{i=1}^n e_{ji}x_i + v_j - v_j =$

$= \sum_{i=1}^n e_{ji}x_i \Rightarrow \bar{f}_0: V \rightarrow W$ линейно $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ - афф. отображ.

Формулы афф. отображ. при переходе к другой а.с.к.

$(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$, $(B, W, \rightarrow)$ - афф. кр-ва

$\dim \mathcal{A} = n$; $\dim B = m$

(I) $= (O, E)$; $E = (e_1, \dots, e_n)$ а.с.к. в $\mathcal{A}$

(I') $= (O', E')$; $E' = (e'_1, \dots, e'_n)$

$$\begin{aligned} (I) &= (O, E); \quad E = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m) \\ (II) &= (O', E'); \quad E' = (\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_m) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} (I) &= (O, E); \\ (II) &= (O', E'); \end{aligned}} \right\} \text{ а.с.к. в } V$$

$f: A \rightarrow B$ — аф. отобра. в а.с.к. (I) и (II)

Формулы: $\bar{X} = L\bar{x} + \bar{b}$ — задают f

Переход от I к I': $\bar{x} = U\bar{x}' + \bar{a}$

Переход от II к II': $\bar{X} = \bar{U}\bar{X}' + \bar{\alpha}$

Тогда $\bar{U}\bar{X}' + \bar{\alpha} = L(U\bar{x}' + \bar{a}) + \bar{b}$

$$\bar{U}\bar{X}' = L U \bar{x}' + L\bar{a} + \bar{b} - \bar{\alpha}$$

$$\bar{X}' = \underbrace{\bar{U}^{-1} L U}_{L'} \bar{x}' + \underbrace{\bar{U}^{-1} (L\bar{a} + \bar{b} - \bar{\alpha})}_{\bar{b}'}$$

$\bar{X}' = L'\bar{x}' + \bar{b}'$ — формулы, задающие аф. отобра. в а.с.к. (I') и (II')

Лекция 13

21.11

Аффинные преобразования и замена координат.

$(A, V, \rightarrow)$ — аф. кр.-во; $\dim A = n$

$(I) = (O, E); \quad E = (e_1, \dots, e_n)$ — а.с.к.

Тогда $f: A \rightarrow A$ — аффинное преобразование

Преобразование f задается в (I) а.с.к.:

$$\bar{X} = L\bar{x} + \bar{\theta}$$

$\bar{x}$ — коорд.-ты т. M ; $\bar{X}$ — коорд.-ты т. $f(M)$ в (I)

$$L = (f(E)/E); \quad \bar{\theta} = f(O) \text{ в (I)}$$

$\bar{f}(E)$ — новый базис кр.-ва V

$(f(O), \bar{f}(E))$ — новая а.с.к.

Будем говорить, что а.с.к. (II) получается из (I) с помощью аф. преобразования f

f -ые переходы имеют вид: $\bar{y} = U\bar{y}' + \bar{a}$,

где $\bar{y}$ — коорд.-ты т. $N \in A$ в (I),

$\bar{y}'$ — коорд.-ты т. N в (II),

$$U = (f(E)/E) = L,$$

$\bar{a}$ — коорд.-ты $f(O)$ в (I)

Если $N = f(M)$, то $\bar{y} = \bar{X}$, $\bar{y}' = \bar{x}$, т.е.

«новые» коорд.-ты т. $f(M)$ в (II) — это

«старые» коорд.-ты т. M в (I)

! Т. $M \in A$ неподвижна для аф. преобразования $f: A \rightarrow A$, если $f(M) = M$

Пусть аф. кр.-е задано в некоторой с.к.:

$$\bar{X} = L\bar{x} + \bar{b}$$

$$(L - E)\bar{x} + \bar{b} = 0$$

Если $(L - E) \neq 0$, то $\exists!$ решение

Если $(L - E) = 0$, то все зависит от $\bar{b}$:

либо решений нет, либо решений

бесконечно много

! Если все точки кр.-ва A неподвижны, то f — тождественное преобразование

Параллельный перенос на v -х и кр.-ва A

— сопоставляет точке M точку $M + v$

Φ -лы параллельного переноса:

$$\begin{cases} X_1 = X_1 + a_1 \\ \vdots \\ X_n = X_n + a_n \end{cases}$$

где $a_1, \dots, a_n$ — координаты в-ра a

Если $a \neq 0$, то неподвижных точек нет.

Если $a = 0$, то $f = I_A$ (тождественное n -е)

Гомотетия с центром в т. $O \in A$ с коэф. $\lambda > 0$

n -ва A сопоставляет точке $M \in A$

точку M' : $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$

В а.с.к. с началом в центре гомотетии

преобразование задается след. формулами:

$$\begin{cases} X_1 = \lambda X_1 \\ \vdots \\ X_n = \lambda X_n \end{cases}$$

Если $\lambda \neq 1$, то неподвижная точка — начало координат

Если $\lambda = 1$, то $f = I_A$

Преобразование центральной симметрии с центром

в т. $O \in A$ сопоставляет т. $M \in A$ точке M' ,

симметричную точке M относительно т. O ,

т.е. $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$

В а.с.к. с началом в центре симметрии:

$$\begin{cases} X_1 = -X_1 \\ \vdots \\ X_n = -X_n \end{cases}$$

Неподвижная точка — центр симметрии.

Изометрические отображения.

Пусть $(A, V, \rightarrow), (B, W, \rightarrow)$ — метризованные аф. n -ва
Отобр. $f: A \rightarrow B$ наз-ся изометрическим,

если оно сохраняет расстояние между точками, т.е. $|\overrightarrow{f(A)f(B)}| = |\overrightarrow{AB}| \quad \forall A, B \in A$

Лемма:

$(A, V, \rightarrow)$ — аф. n -ва

$A, B, C \in A$

Пусть C делит отрезок AB в отношении λ

Тогда т. B делит AC в отношении $-(1+\lambda)$;

т. A делит BC в отношении $-\frac{(1+\lambda)}{\lambda}$

При этом хотя бы одно из этих чисел больше 0.

Док-во:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}, \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \neq 1$$

$$1) \text{ Тогда } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = (1+\lambda) \overrightarrow{CB} = -(1+\lambda) \overrightarrow{BC}$$

$$2) \overrightarrow{BA} = -(1+\lambda) \overrightarrow{CB} = -\frac{(1+\lambda)}{\lambda} \overrightarrow{AC}$$

$$3) \text{ Если } -1 < \lambda < 0, \text{ то } -\frac{(1+\lambda)}{\lambda} > 0$$

$$\text{Если } \lambda < -1, \text{ то } -(1+\lambda) > 0$$

(3-й вариант: $\lambda > 0$)

Лемма:

$(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$ — метризованное афф. п-во

$A, B, C \in \mathcal{A}$

Тогда C делит отрезок AB в отношении

$$\lambda \in [0; +\infty) \Leftrightarrow |AB| = |AC| + |CB| \text{ и } \lambda = \frac{|AC|}{|CB|}$$

Док-во:

$\Rightarrow$ Пусть C делит AB в отношении λ

$$\text{Тогда } \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}; \quad \overrightarrow{AB} = (1+\lambda) \overrightarrow{CB}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \lambda |\overrightarrow{CB}|; \quad |AB| = (1+\lambda) |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CB}| + \lambda |\overrightarrow{CB}| =$$

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{|\overrightarrow{CB}| + |\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}$$

$\Leftarrow$ Пусть $|AB| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|$; $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}$

$$\text{Тогда } |\overrightarrow{AB}|^2 = (|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|)^2$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$$

$$(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = (|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|)^2$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 + 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) + |\overrightarrow{CB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| + |\overrightarrow{CB}|^2$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \Rightarrow \overrightarrow{AC} \text{ и } \overrightarrow{CB} \text{ сонаправлены}$$

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$$

■

Теорема:

Каждое изометрическое отображ. афф. п-ва аффинно

Док-во:

Пусть $(\mathcal{A}, V, \rightarrow), (\mathcal{B}, W, \rightarrow)$ — метризованные афф. п-ва

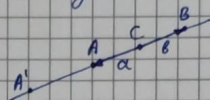
$f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ — изометрич. отображ.

Пусть $C \in \mathcal{A}$; $\alpha, \beta \in V$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$A, A', B \in \mathcal{A}$

Положим $\overrightarrow{CA} = \alpha$, $\overrightarrow{CB} = \beta$, $\overrightarrow{CA'} = \lambda \alpha$

т. C делит $A'A$ в отношении λ



Пусть $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$

Тогда (по лемме 1) $(-\lambda) \vee (\frac{1-\lambda}{\lambda}) \vee (\lambda-1) > 0$

Рассм. $\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$ (ост. случаи аналогично)

По лемме 1 т. A' делит AC в отношении $\frac{1-\lambda}{\lambda}$

По лемме 2 $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AA'}| + |\overrightarrow{A'C}|$ и $\frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{|\overrightarrow{A'C}|}{|\overrightarrow{AC}|}$

т.к. f — изометрич. отображ., то

$$|f(\overrightarrow{AC})| = |f(\overrightarrow{AA'}) + f(\overrightarrow{A'C})|$$

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{|f(\overrightarrow{A'C})|}{|f(\overrightarrow{AC})|}$$

$f(A')$ делит $f(A)f(C)$ в отношении $\frac{1-\lambda}{\lambda}$,

$$\text{т.е. } \overrightarrow{f(A)f(A')} = \frac{1-\lambda}{\lambda} \overrightarrow{f(A)f(C)}$$

$$\lambda \overrightarrow{f(A)f(A')} = (1-\lambda) \overrightarrow{f(A)f(C)}$$

$$\lambda (\overrightarrow{f(A)f(A')} + \overrightarrow{f(A)f(C)}) = \overrightarrow{f(A)f(C)}$$

$$\lambda \overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(C)}$$

$$\overrightarrow{f(C)f(A')} = \lambda \overrightarrow{f(C)f(A)}$$

$$\overrightarrow{f_C}(\overrightarrow{CA'}) = \lambda \overrightarrow{f_C}(\overrightarrow{CA}) \Rightarrow \overrightarrow{f_C}(\lambda \alpha) = \lambda \overrightarrow{f_C}(\alpha)$$

Докажем линейность:

Докажем, что $\overrightarrow{f}(a+b) = \overrightarrow{f}(a) + \overrightarrow{f}(b)$:

Если $\alpha = \beta$, то $\alpha + \beta = 2\alpha$

$$\overline{f_c}(a+b) = \overline{f_c}(2a) = 2\overline{f_c}(a) = \overline{f_c}(a) + \overline{f_c}(b)$$

Если $a \neq b$, то:

Пусть D — середина AB

$$\text{Тогда } \overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

$$\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} \Rightarrow 2\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{CB}$$

по лемме 2 f — изометрич. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(D)$ делит $f(A)f(B)$ в отношении $\lambda=1$,

$$\text{т.е. } \overline{f(A)f(D)} = \frac{1}{2} \overline{f(A)f(B)}$$

$$\text{Тогда } \overline{f_c}(\overline{CD}) = \frac{1}{2} (\overline{f_c}(\overline{CA}) + \overline{f_c}(\overline{CB})) =$$

$$= \overline{f_c}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2} (\overline{f_c}(a) + \overline{f_c}(b)) = \frac{1}{2} \overline{f_c}(a+b) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{f}$ — линейно $\Rightarrow f$ — аффинно. ■

лекция 14

5.12

Ортогональная матрица изометрического отображения.

Теорема:

$(A, V, \rightarrow), (B, W, \rightarrow)$ — n -мерные метрич. кр-ва

(I) $= (O, e_1, \dots, e_n)$ — а.с.к. в A , $E = (e_1, \dots, e_n)$ — ОНБ

(II) $= (\overline{O}, \overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n)$ — а.с.к. в B , $\overline{E} = (\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n)$

Тогда аффинное отображ. $f: A \rightarrow B$ явл-ся

изометрическим $\Leftrightarrow$ матрица перехода

$L = (\overline{f(e_i)} / \overline{e}_i)$ ортогональна (т.е. $L^T = L^{-1}$)

$$(\overline{E} = \overline{f(E)} = (\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n))$$

Док-во:

($\Rightarrow$) Пусть f — изометрич. отображ.

$$\text{Тогда } \forall a \in V: |\overline{f(a)}| = |\overline{f(a)f(a+a)}| = |\overline{A(A+a)}| =$$

$$= |\overline{a}|;$$

$$\forall a, b \in V: |\overline{f(a+b)}|^2 = |\overline{f(a)}|^2 + 2(\overline{f(a)}, \overline{f(b)}) + |\overline{f(b)}|^2 = |\overline{a}|^2 + 2(\overline{a}, \overline{b}) + |\overline{b}|^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ сохраняет длину в-в и скалярное произведение $\Rightarrow \overline{f(E)}$ — ОНБ $\Rightarrow L$ — ортогональна

($\Leftarrow$) Пусть L — ортогональна $\Rightarrow$ отображ. сохраняет скалярное кр-е и длину в-в $\Rightarrow f$ (в обратную сторону)

Группы $O(n)$ и $SO(n)$

Опр. Мно-во ортогональных матриц размерами $n \times n$ образует группу $O(n)$ относительно умножения.

$$* \det L \in \{\pm 1\} \quad \forall L \in O(n)$$

$$\text{Опр. } SO(n) = \{L \in O(n) : \det L = 1\} \subset O(n)$$

$n=2$:

$$\text{Пусть } L = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \in SO(2)$$

координат базисных в-в (ОНБ в $\mathbb{R}^2$)

$$\text{Тогда } \begin{cases} e_{11}e_{12} + e_{21}e_{22} = 0 & (\text{скалярное кр-е}) \\ e_{11}^2 + e_{21}^2 = 1 \\ e_{12}^2 + e_{22}^2 = 1 & (\text{длина в-в}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi: [0; 2\pi) : e_{11} = \cos \varphi, e_{21} = \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\det L = 1$ — собственное преобразование

Если $L = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$,

то $|L| = -1$ — несобственное преобразование

Вычислим композицию двух поворотов:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1 \Rightarrow$ группа $SO(2)$ коммутативна

Матрица $L = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ не меняется при переходе к другой полнотн. ориент. прямой с.к.

* Если $Q = (E'/E) \in SO(2)$, то $A' = Q^{-1}AQ =$
 $= Q^{-1}QA = EA = A$

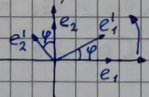
Поворот

Пусть $(A, V, \rightarrow)$ — ориент. метрич. п.л.-тн

(O, E) — а.с.к. в A

$f: A \rightarrow A$ — изометрич. преобразование (само на себя) с.к. (O, E) , которое задаётся φ -лами:

$$(*) \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$



Тогда матрица преобразования f :

$$L = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Пусть есть ещё одка а.с.к. (O, E')

Выясним, как меняется матрица преобразования

f при переходе от (O, E) к (O, E') :

$$L' = U^{-1}LU, \text{ где } U = (E'/E)$$

Если E и E' одинаково ориентированы, то $U \in SO(2)$

Тогда в силу коммутативности:

$$L' = U^{-1} \cdot L \cdot U = U^{-1} \cdot U \cdot L = L$$

Т.о. в а.с.к. (O, E') с произвольным ОНБ E' и одинаковой ориентацией с E , преобраз. f задаётся φ -лами (*).

Рассм. второй случай: $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$L' = U^{-1} \cdot L \cdot U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

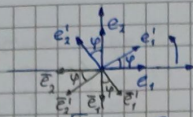
$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}$$

Т.о. любой базис, ориент-я которого

противоположна ориентации базиса E , имеет ориентацию, одинаковую с E' , для которого матрица перехода $(E'/E) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Тем самым, в а.с.к. (O, E') с произвольным ОНБ E' и ориентацией, противоположной с E , преобраз. f задаётся φ -лами:

$$\begin{cases} x' = x \cos(-\varphi) - y \sin(-\varphi) \\ y' = x \sin(-\varphi) + y \cos(-\varphi) \end{cases}$$



(если при повороте полож. ориент. базис E поворачивается на угол φ , то отриц. ориент. базис E' поворачивается на угол $-\varphi$)

Опр. Поворот на угол φ ориент. метрич. н-ти A вокруг точки O — это преобразование, задаваемое в произвольной полож. ориент. а.с.к. B в A с началом в т. O ф-лами (*).

Теорема:

Всякое собственное изометрич. преобразование ориент. метрич. плоскости есть либо параллельный перенос, либо поворот.

Док-во:

В произвольной полож. ориент. н-ти преобразование задаётся ф-лами:

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + b_1 \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b_2 \end{cases}$$

Если $\cos \varphi = 1$, то $\sin \varphi = 0$:

$$\begin{cases} x' = x + b_1 \\ y' = y + b_2 \end{cases} \quad \text{— параллельный перенос}$$

Пусть $\cos \varphi \neq 1$

Для неподвижной точки:
$$\begin{cases} x_0 = x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi + b_1 \\ y_0 = x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 (\cos \varphi - 1) - y_0 \sin \varphi = -b_1 \\ x_0 \sin \varphi + y_0 (\cos \varphi - 1) = -b_2 \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos \varphi - 1 & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{pmatrix} = (\cos \varphi - 1)^2 + \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + 1 + \sin^2 \varphi = 2(1 - \cos \varphi) \neq 0$$

Тогда $(x_0; y_0)$ — единственное решение системы (единственная неподвижная точка).

Пусть $O(x_0; y_0)$ — неподвижная точка

Перенесём начало координат в т. $O(x_0; y_0)$:

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

$$\text{Тогда} \quad \begin{cases} \bar{x}' = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ \bar{y}' = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases} \quad \text{— поворот}$$

лекция 15.

12.12

Винтовое движение

Пусть $(A, V, \rightarrow)$ — ориентированное евклидово 3х-мерное нр-во

$f: A \rightarrow A$ собственное изометрич. преобраз. в A :

$$\begin{cases} x' = e_{11}x + e_{12}y + e_{13}z + b_1 \\ y' = e_{21}x + e_{22}y + e_{23}z + b_2 \\ z' = e_{31}x + e_{32}y + e_{33}z + b_3 \end{cases}$$

$$L = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \in SO(3)$$

Рассм. индуцированное преобразование:

$$\begin{cases} x' = e_{11}x + e_{12}y + e_{13}z \\ y' = e_{21}x + e_{22}y + e_{23}z \\ z' = e_{31}x + e_{32}y + e_{33}z \end{cases}$$

Вопрос: существуют ли такие в-ры, что их образы будут коллинеарны самим в-рам (самим себе)?

т.е. $f(a) = \lambda a$, $\lambda \in \mathbb{R}$

т.к. f - изометрия, то длина в-ра a сохраняется, т.е. $\lambda = 1$

Пусть $a = (x; y; z)$

$$\begin{cases} \lambda x = e_{11}x + e_{12}y + e_{13}z \\ \lambda y = e_{21}x + e_{22}y + e_{23}z \\ \lambda z = e_{31}x + e_{32}y + e_{33}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (e_{11} - \lambda)x + e_{12}y + e_{13}z = 0 \\ e_{21}x + (e_{22} - \lambda)y + e_{23}z = 0 \\ e_{31}x + e_{32}y + (e_{33} - \lambda)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{(L - \lambda E)}_B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

1 случай: $|B| \neq 0 \Rightarrow B$ - невырожденная $\Rightarrow \Rightarrow \exists B^{-1} \Rightarrow B^{-1}B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

2 случай: $|B| = 0$ характеристический многочлен

$$|B| = |L - \lambda E| = -\lambda^3 + (e_{11} + e_{22} + e_{33})\lambda^2 -$$

$$- \left(\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \right) \cdot \lambda + |L| = 0 -$$

кубическое ур-е относительно λ

Решение ур-я: 3 вещественных числа, либо 1 веществ. и 2 комплексно-сопряж. 1 случай: 2 комплексно-сопряж. корня (λ_2, λ_3)

Тогда матрицу L можно привести к диагональному виду так, чтобы

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Тогда $|L| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \lambda_3) > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$

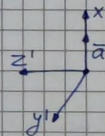
2 случай: все 3 корня - вещественные

Тогда $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \pm 1 = 1$, т.к. $L \in SO(3) \Rightarrow$ (т.к. L -ортонорм.) $\Rightarrow$ хотя бы один из корней равен 1

т.о. $\exists$ в-р $\bar{a}$ такой, что $\bar{a} \rightarrow \bar{a}$

Дополним этот в-р $\bar{a}$ до полного ориент.

ОКБ:



Тогда матрица преобразования имеет вид: $L' = \begin{pmatrix} 1 & e_{12} & e_{13} \\ 0 & e_{22} & e_{23} \\ 0 & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$

$$\text{т.к. } L' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и т.к. L' - ортогональн. $\Rightarrow L'^T \cdot L' = E \Rightarrow$

$$\Rightarrow L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & e_{23} \\ 0 & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

Тогда $L' \in SO(3) \Rightarrow L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

т.е. L' задаёт поворот вокруг неподвижной оси OX' на угол φ

$$\left(\begin{array}{l} OY' - \text{неподвижная: } L' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ OZ' - \text{неподвижная: } L' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

т. $O \in \mathcal{A}$, OX' — неподвижная ось.

Тогда в а.с.к. $(O, \mathcal{E})$ преобразование f задается φ -лами:

$$f: \begin{cases} \bar{x} = x + b_1 \\ \bar{y} = y \cos \varphi - z \sin \varphi + b_2 \\ \bar{z} = y \sin \varphi + z \cos \varphi + b_3 \end{cases}$$

Если $\cos \varphi = 1$, то f — параллельный перенос.

Если $\cos \varphi \neq 1$, переместим начало координат в т. $O' \in \mathcal{A}$:

$$\begin{cases} x = x' + a_1 \\ y = y' + a_2 \\ z = z' + a_3 \end{cases}$$

Тогда f в а.с.к. $(O', \mathcal{E})$ имеет вид:

$$\begin{cases} \bar{x}' + a_1 = x' + a_1 + b_1 \\ \bar{y}' + a_2 = (y' + a_2) \cos \varphi - (z' + a_3) \sin \varphi + b_2 \\ \bar{z}' + a_3 = (y' + a_2) \sin \varphi - (z' + a_3) \cos \varphi + b_3 \end{cases}$$

$$\text{т.к. } \begin{vmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{vmatrix} = 2(1 - \cos \varphi) \neq 0,$$

$$\text{то } \exists a_2, a_3: \begin{cases} a_2(\cos \varphi - 1) - a_3 \sin \varphi + b_2 = 0 \\ a_2 \sin \varphi + a_3(\cos \varphi - 1) + b_3 = 0 \end{cases}$$

Тогда в а.с.к. $(O', \mathcal{E})$ с соответствующими a_2, a_3 и с началом в т. O' преобраз. f задается φ -лами:

$$\begin{cases} \bar{x}' = x' + b_1 \\ \bar{y}' = y' \cos \varphi - z' \sin \varphi \\ \bar{z}' = y' \sin \varphi + z' \cos \varphi \end{cases}$$

Это преобразование — композиция поворота вокруг прямой OX' и параллельного переноса вдоль этой прямой (винтовое движение).

Предмет:

Каждое собственное изометрич. преобразование ориентированной метрической 3х-мерной н-ти есть либо параллельный перенос, либо винтовое движение.