

Вопросы к экзамену по алгебре

Лето, 2025 г.

1. Корни и значения многочлена. Теорема Безу.
2. Формула Тейлора.
3. Задача интерполяции. Интерполяционная формула Лагранжа.
4. Кратные корни.
5. Кольца с однозначным разложением: определения и примеры.
6. Кольцо многочленов как кольцо с однозначным разложением.
7. Пример целостного кольца, в котором разложение на неразложимые сомножители не обрывается.
8. Пример целостного кольца, в котором разложение на неразложимые множители неоднозначно.
9. Кольцо многочленов как кольцо главных идеалов.
10. Кольца с условием максимальности.
11. Теорема Гильберта.
12. Теорема о существовании корня: существование.
13. Теорема о существовании корня: единственность.
14. Результант двух многочленов от одного неизвестного: определение, формула вычисления через множество корней.
15. Определитель Вандермонда. Формулы Виета.
16. Критерий совместности двух уравнений с одним неизвестным.
17. Исключение неизвестных.
18. Дискриминант: определение, связь с результатом.
19. Кольцо многочленов от нескольких переменных.
20. Словарное упорядочивание многочленов. Лемма о высшем члене произведения двух многочленов.
21. Подкольцо симметрических многочленов.

22. Симметрические многочлены от корней многочлена от одной переменной.
23. Алгебраическая независимость элементарных симметрических многочленов.
24. Лемма о модуле старшего члена.
25. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
26. Теорема о значении многочлена в центре правильного многоугольника.
27. Теорема об отсутствии локальных максимумов модуля.
28. Вложение целостного кольца в поле: существование.
29. Вложение целостного кольца в поле: единственность.
30. Поле рациональных дробей. База векторного пространства $P(x)$ над полем P (простейшие дроби).
31. Равносильные определения кольца с однозначным разложением.
32. Лемма о примитивных многочленах.
33. Кольцо многочленов над кольцом с однозначным разложением — само кольцо с однозначным разложением.
34. Неразложимые многочлены над $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$.
35. Линейные преобразования векторного пространства и его матрица в данной базе.
36. Координаты образа вектора. Связь между матрицами линейного преобразования в различных базах.
37. Алгебра линейных преобразований. Изоморфизм с алгеброй матриц.
38. Образ и ядро линейного преобразования — подпространства векторного пространства.
39. Связь размерностей ядра и образа линейного преобразования.
40. Теорема о невырожденных линейных преобразованиях.
41. Инвариантные подпространства и неприводимость. Связь этих понятий.
42. Индуцированные преобразования.
43. Одномерные инвариантные подпространства, собственные векторы и собственные значения.
44. Теорема Гамильтона–Кэли.

45. Свойства нильпотентных преобразований.
46. Свойства полупростых преобразований.
47. Полупростота над полем, содержащим характеристические корни преобразования.
48. Разложение преобразования на полупростую и нильпотентную компоненты: построение компонент и проверка требований.
49. Разложение преобразования на полупростую и нильпотентную компоненты: единственность.
50. Полупростота над полем действительных чисел.
51. Задача о подобии матриц: постановка, жорданова форма, формулировка теоремы Жордана.
52. Корневые векторы, корневое подпространство.
53. Теорема о корневом разложении.
54. Канонический вид нильпотентного преобразования.
55. Доказательство теоремы Жордана.
56. Многочлены от матриц.
57. Функции от матриц. Многочлен Лагранжа–Сильвестера.
58. Ряды от матриц.
59. Евклидовы и унитарные пространства: аксиоматика и примеры.
60. Ортонормированные системы векторов. Процесс ортогонализации.
61. Изоморфизм евклидовых пространств.
62. Норма вектора, её свойства.
63. Лемма об ограниченности линейного преобразования евклидова пространства.
64. Норма линейного преобразования, её свойства.
65. Сопряженные отображения.
66. Определения и свойства ортогональных преобразований.
67. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования.
68. Определение и свойства симметрических преобразований.

69. Характеристические корни симметрического преобразования.
70. Ортонормированной базы из собственных векторов для симметрического преобразования. Канонический вид матрицы симметрического преобразования.
71. Полярное разложение: единственность.
72. Полярное разложение: существование.
73. Поведение матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных.
74. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
75. Приведение квадратичной формы к каноническому виду: противоречащий пример в характеристике 2, инвариантность ранга.
76. Сигнатура и закон инерции действительной квадратичной формы.
77. Критерий эквивалентности и канонический вид комплексных квадратичных форм относительно группы $GL_n(\mathbb{C})$.
78. Критерий эквивалентности и канонический вид действительных квадратичных форм относительно группы $GL_n(\mathbb{R})$.
79. Критерий эквивалентности и канонический вид действительных квадратичных форм относительно группы $O_n(\mathbb{R})$.
80. Положительно определенные квадратичные формы: равносильные определения.
81. Одновременная канонизация пары действительных квадратичных форм.