Дуомб $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \overline{\lambda_2} = -1$

$\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\quad \lambda_1 |\lambda_2|^2 = -1 \Rightarrow \lambda_1 = -1$

$\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$

АБ =- В. Матрица $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = -1$

$$\begin{cases} x' = -x + b_1 \\ y' = \cos\alpha y - \sin\alpha x + b_2 \\ z' = \sin\alpha y + \cos\alpha x + b_3 \end{cases}$$

① $\cos\alpha = 1$

- скольз. симм. пл. и паран. п.

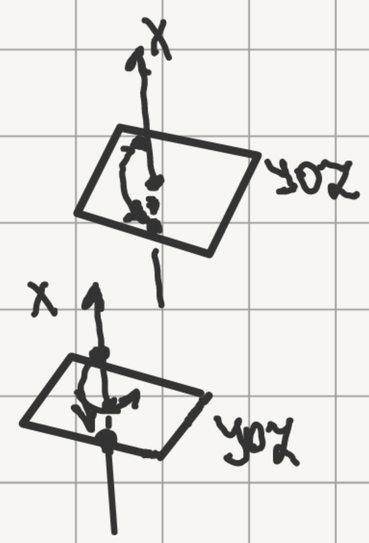
② $\cos\alpha \neq 1$ зерк. поворот.

$\downarrow$

$x' = -x$

$y' = \cos\alpha y - \sin\alpha z$

$z' = \sin\alpha y + \cos\alpha z$



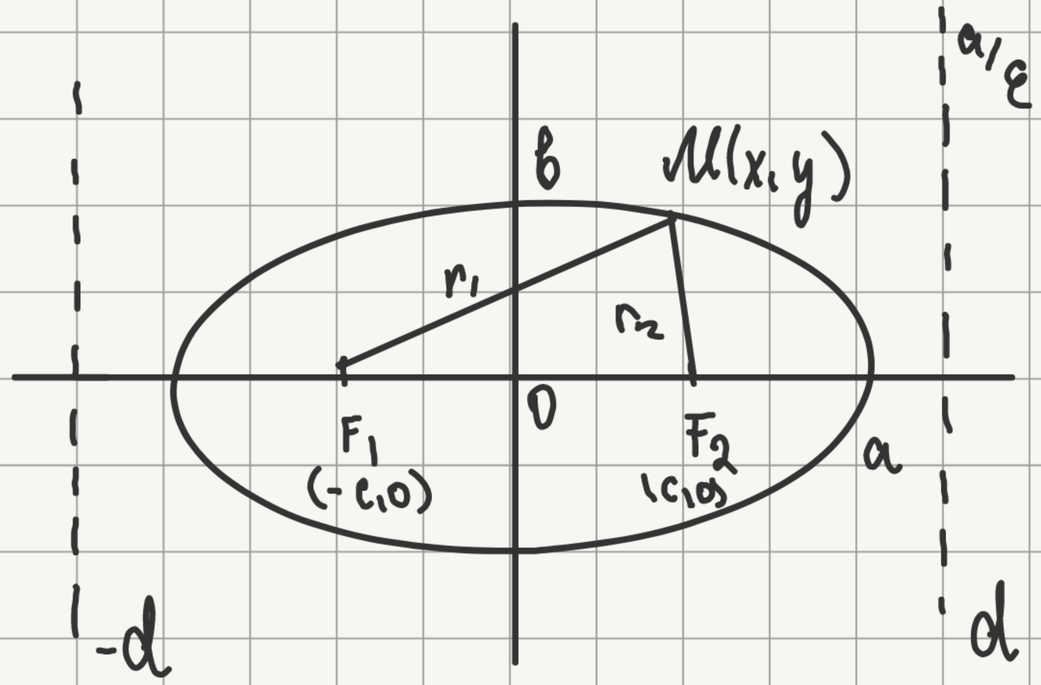
4.

2) Кривые второго порядка на плоскости, примеры в природе. Эллипс, гипербола, парабола – опред. как гем. места точек. Уравнение в канон. с.к. +3)

Опр. Множество точек М, координаты (x,y) которых удовл. уравнению $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$ наз. кривой второго порядка.

Примеры в природе: спутниковая тарелка, мост ...

I. Эллипс



1. $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \\ a \geq b,\ b > 0 \end{cases}$

Опр. 1) Эллипсом наз. гем. место точек плоскости, сумма расст. которых от двух фикс. точек (фокусов) есть величина постоянная.

2) Эллипс – кривая, которая в кан. п. с.к. задается канон. ур-нием.

a - большая полуось

b - малая полуось

$O = (0,0)$ – центр эллипса

$(\pm a, 0), (0, \pm b)$ – вершины эллипса

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $(\pm c; 0)$ – фокусы

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ – эксцентриситет

$0 \leq \varepsilon < 1$; $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

$p = \frac{b^2}{a}$ – фок. параметр, при $\varepsilon \neq 0$

прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ наз. директрисами

Фокальное св-во: Пусть M - точка $\in$ эллипсу, тогда $|F_1M| + |F_2M| = 2a$

▶ Пусть к-ты точки $M(x,y)$ удовл. ур-ию $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, докажем, что выполняется $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. (почему нет 2 слаг

(⇒)

Т.к. координаты F_2 равны $(c,0)$, то

$$r_2^2 = |F_2M|^2 = (x-c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2xc + c^2 + b^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2xc + a^2 =$$

$$= \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2 = (\varepsilon x - a)^2$$

$$\Rightarrow \quad r_2 = |\varepsilon x - a|.$$

Т.к. для эллипса $|x| \le a$ и $0 \le \varepsilon < 1$, то $|\varepsilon x| < a \Leftrightarrow$

$$-a < \varepsilon x < a \Rightarrow a - \varepsilon x > 0$$

$$\Rightarrow \quad r_2 = a - \varepsilon x$$

Аналогично $r_1 = a + \varepsilon x \Rightarrow r_1 + r_2 = 2a$.

(⇐) Обратно, пусть $M(x,y)$ - такая точка плоскости, что сумма ее расстояний до двух фикс. точек F_1, F_2 равна $2a$:

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$a^2\left((x-c)^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

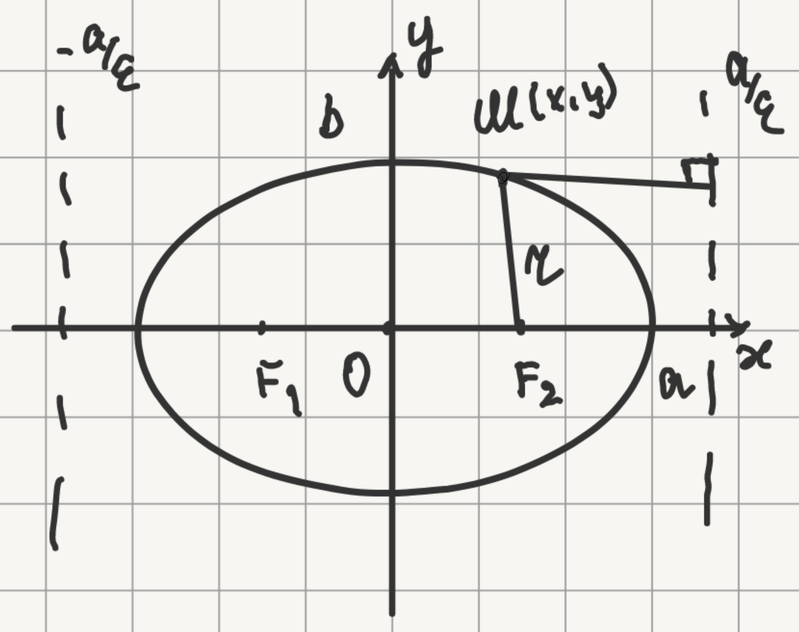
$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2), \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Директориальное свойство: эллипс явл. геом. местом точек, отношение расстояний от которых до

фокуса и до соотв. директрисы постоянно: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.



⇒ ▶ Рассм. случай, когда фокус и директриса правые.

Расстояние $M(x,y)$ эллипса до правой директрисы $x = \frac{a}{\varepsilon}$ равно

$$d = \left| x - a/\varepsilon \right| = \frac{|\varepsilon x - a|}{\varepsilon} \uparrow = \frac{r}{\varepsilon}$$

$$r = |\varepsilon x - a|$$

⇐ Обратно, $r = \varepsilon d \iff$ $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \varepsilon \left| \frac{a}{\varepsilon} - x \right|$

$$(x-c)^2 + y^2 = (a - \varepsilon x)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2\varepsilon a x + \varepsilon^2 x^2$$

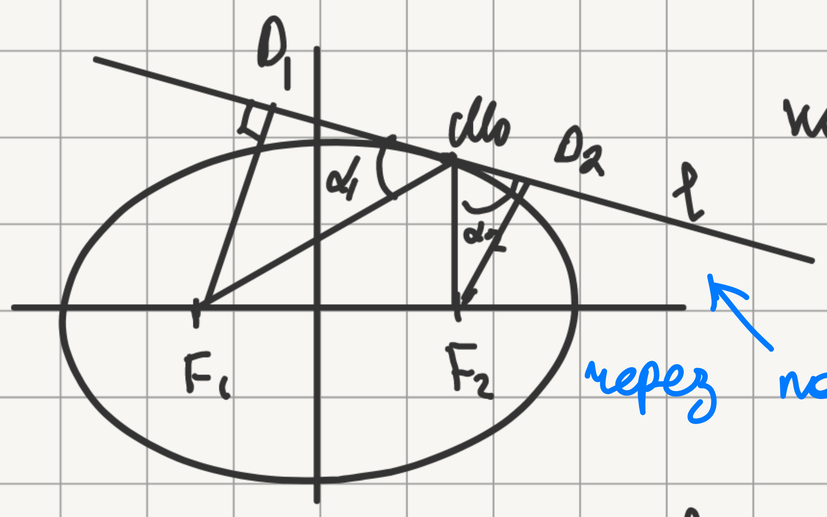
$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \blacktriangle$$

Оптическое св-во эллипса: Если источник света находится в одном из фокусов эллипт. зеркала, то его лучи, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе. При этом лучи, вышедшие из фокуса одновременно, в другой фокус приходят тоже одновременно $\Rightarrow$ следует из ф-го св-ва эллипса.

Фокальные радиусы произв. точки M_0 эллипса составляют равные углы с касат. к эллипсу в точке M_0.



▶ Расстояние F_1D_1 от фокуса $F_1(-c,0)$ до касат-ой, имеющей ур-ие $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

равно $F_1D_1 = \dfrac{\left|\frac{(-c)\cdot x_0}{a^2} + \frac{0\cdot y_0}{b^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \dfrac{\varepsilon x_0 + a}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = r_1$

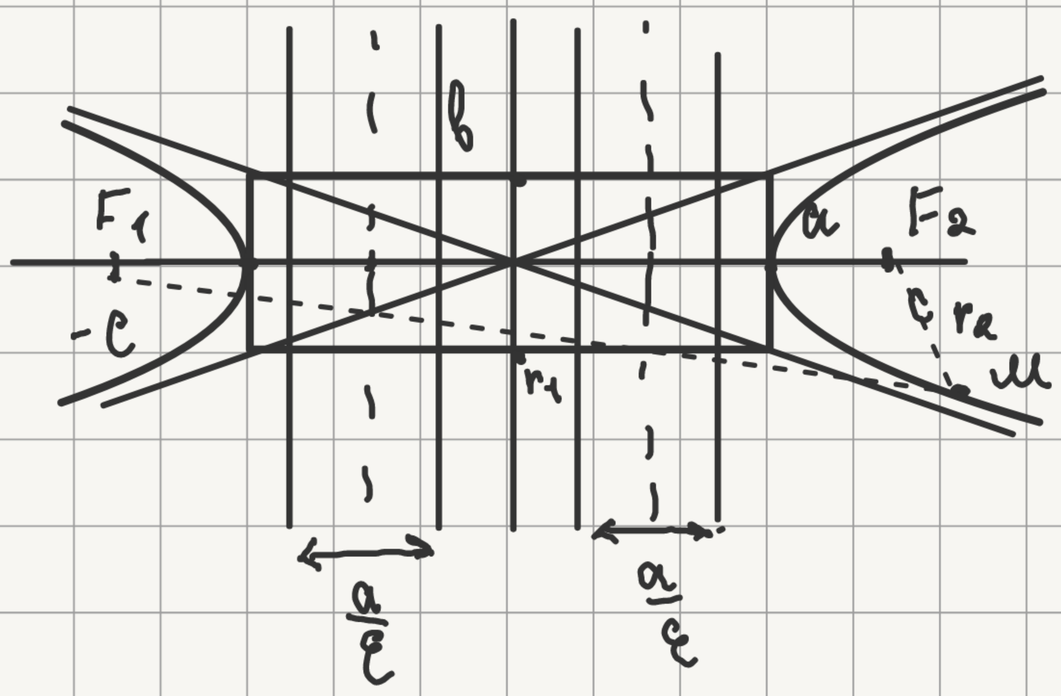
по формуле расст. до прямой $\rho = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\sin\alpha_1 = \frac{F_1D_1}{F_1M_0} = \frac{1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}$$

Аналогично $\sin\alpha_2 = \dfrac{F_2D_2}{F_2M_0} = \dfrac{1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} \Rightarrow \alpha = \alpha_2.$ ▲

II. Гипербола

(1) Кривая второго порядка наз. гиперболой, если сущ. прямоуг. система координат Oxy, в которой уравнение этой кривой имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a>0, b>0$.



Ox – действительная (фокальная) ось
Oy – мнимая ось
$O(0,0)$ – центр гиперболы

Прямые $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ являются асимптотами гиперболы

$(\pm a, 0)$ наз. вершинами гиперболы
a – действит. полуось
b – мнимая полуось
$c = \sqrt{a^2+b^2}$ – линейный эксцентриситет
$(\pm c, 0)$ наз. фокусами
$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ наз. эксцентриситетом $(1<\varepsilon<\infty)$

$p = \frac{b^2}{a}$ наз. фокальным параметром

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ наз. директрисами

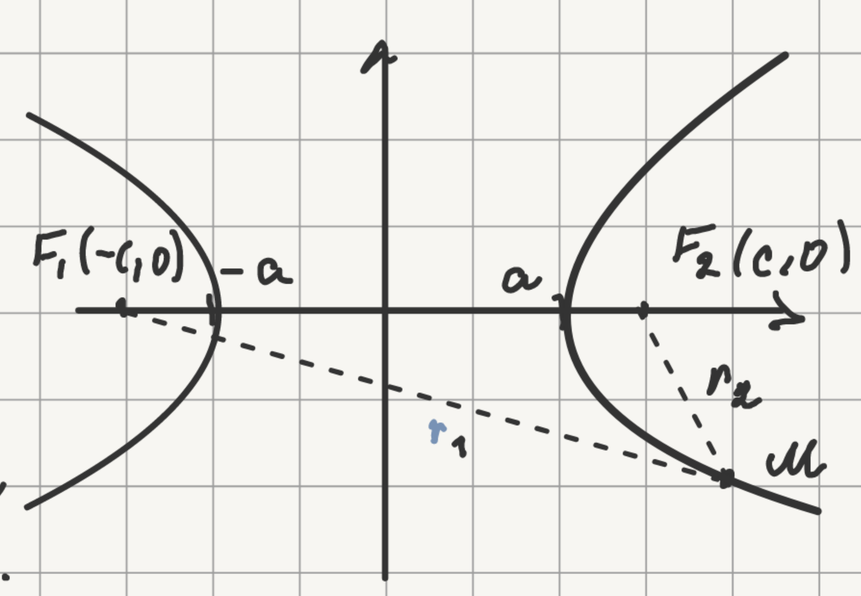
$y^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) b^2$

$x^2 = \left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) a^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Фокальное свойство гиперболы: Гипербола является геом. местом точек M: $|r_1 - r_2| = 2a$

▶ ⇒ Т.к. координаты F_2 равны $(c,0)$, то



$r_2^2 = |F_2M|^2 = (x-c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) - 2xc + c^2 - b^2 =$

$= \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2xc + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2 = (\varepsilon x - a)^2.$

Аналогично док-ся, что $r_1 = |\varepsilon x + a|$

Итак, $r_1 = |\varepsilon x + a|$, $r_2 = |\varepsilon x - a|$, т.к. для гип-лы $\varepsilon > 1$ и $|x| \geq a$, то $|\varepsilon x| \geq a$.

$$|\varepsilon x| \geq a \iff \begin{cases} \varepsilon x \geq a & \text{при } x>0 \\ -\varepsilon x \geq a & \text{при } x<0 \end{cases} \iff \begin{cases} \varepsilon x - a \geq 0, & x>0 \\ \varepsilon x + a \leq 0, & x<0 \end{cases}$$

$$r_1 = \begin{cases} \varepsilon x + a, & x>0 \\ -\varepsilon x - a, & x<0 \end{cases} ; \quad r_2 = \begin{cases} \varepsilon x - a, & x>0 \\ -\varepsilon x + a, & x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a, & x>0 \\ -2a, & x<0 \end{cases}, \text{ т.е. } |r_1 - r_2| = 2a.$$

(⇐) Обратно, пусть $|r_1 - r_2| = 2a$, т.е.,

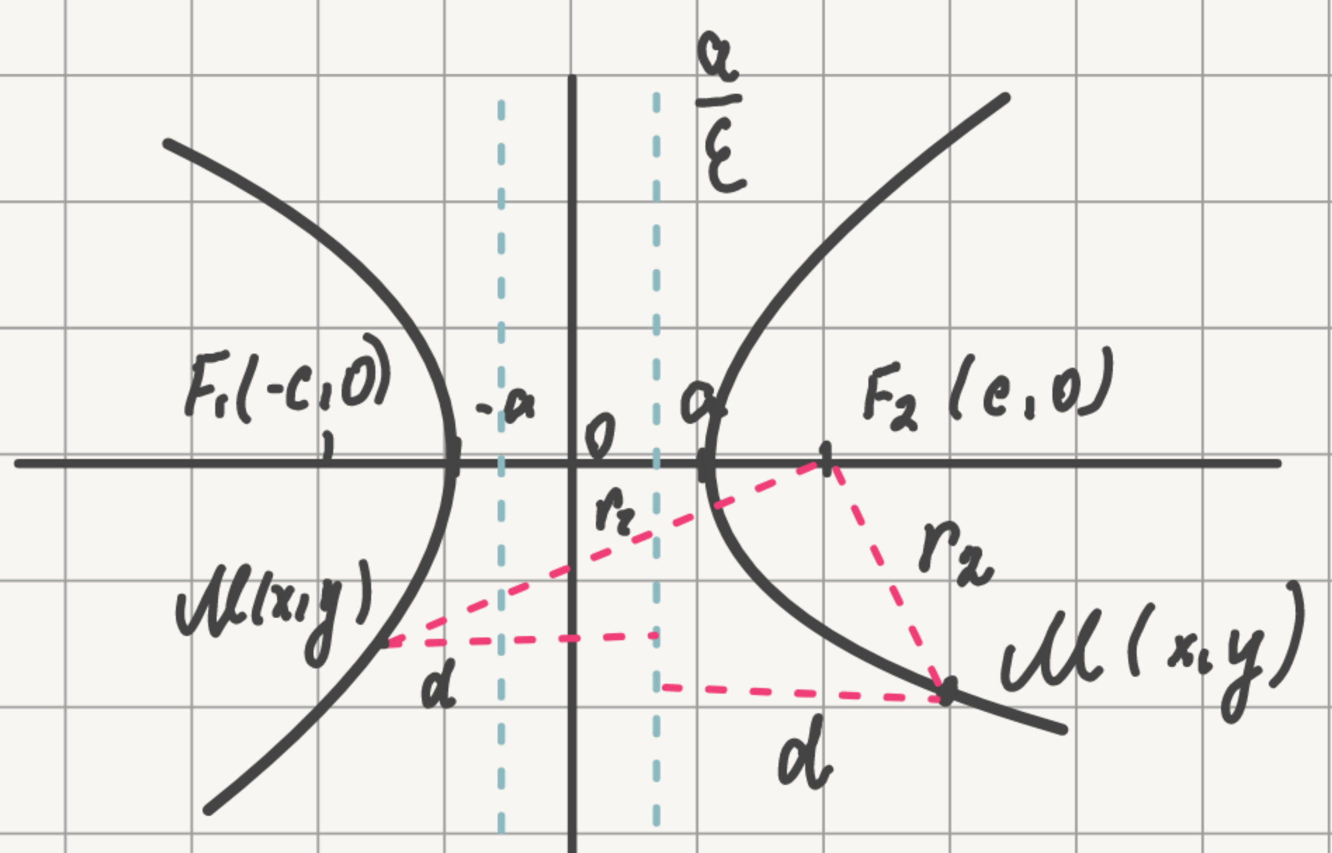
$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

После преобр-ий, мы получим для x и y $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
$$4xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + (xc)^2$$
$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + (xc)^2$$
$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^4 - 2a^2xc + 2a^2xc - a^2c^2$$
$$-b^2x^2 + y^2a^2 = a^2 \cdot (-b^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$c^2 = a^2 + b^2$ ◁

Директориальное св-во: гипербола явл. г.м.т, отношение расстояний которых от фокуса до одноименной директрисы $= \varepsilon$: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.



(⇒) ▷ Рассм. случай, когда фокус и директриса правые. Расст. от $M(x,y)$ гиперболы до правой директрисы $x = \frac{a}{\varepsilon}$ равно

$$d = \begin{cases} x - \frac{a}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}, & x>0 \\ -x + \frac{a}{\varepsilon} = \frac{-\varepsilon x + a}{\varepsilon}, & x< \end{cases}$$

При д-ве фок-го св-ва гиперболы, было получено, что расст. от $M(x,y)$ до правого фокуса равно

$$r = r_2 = \begin{cases} \varepsilon x - a, & x>0 \\ -\varepsilon x + a, & x<0 \end{cases}, \text{ таким образом, } \frac{r}{d} = \varepsilon.$$

(⇐) Обратно, $\frac{r}{d} = \varepsilon \Rightarrow$

$$r = \varepsilon d$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \varepsilon |x - a/\varepsilon|$$
$$(x-c)^2 + y^2 = (x\varepsilon - a)^2$$
$$x^2(1 - \varepsilon^2) + y^2 = 2xc - c^2 - 2x\varepsilon a + a^2$$

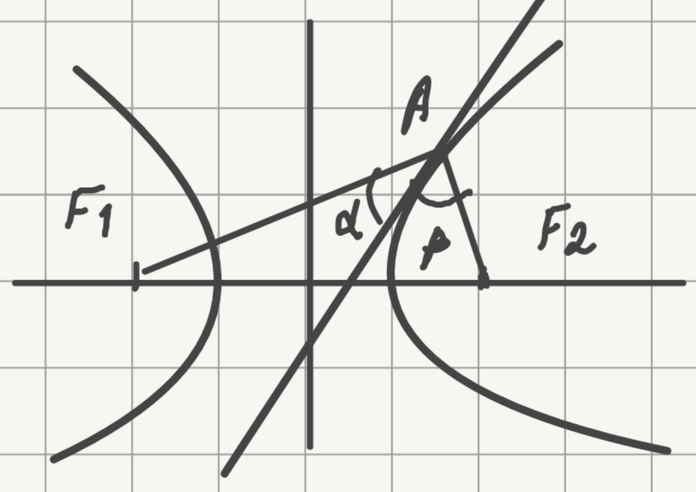
$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2 \qquad c^2=a^2+b^2$$
$$-b^2=a^2\cdot c^2$$

$$-\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=-b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

△.

Оптическое свойство: угол между фок. радиусами и касательной равен.



▷ $\overrightarrow{F_1A}=(x_0+c,\ y_0)$ $\qquad \vec{n}=\left(\frac{x_0}{a^2};-\frac{y_0}{b^2}\right)$

$\overrightarrow{F_2A}=(x_0-c,\ y_0)$

$$\cos(\overrightarrow{F_1A},\vec{n})=\frac{\frac{x_0}{a^2}+\frac{x_0c}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}}{\left|\frac{c}{a}x_0+a\right||\vec{n}|}=\frac{x_0\frac{c}{a^2}+1}{a\left|\frac{c}{a^2}x_0+1\right||\vec{n}|}=\frac{1}{a|\vec{n}|}$$

$\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0+c)^2+\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)b^2}=$ ←→

$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$

$$=\sqrt{x_0^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)+2x_0c+\underbrace{c^2-b^2}_{a^2}}=\sqrt{x_0^2\frac{c^2}{a^2}+2x_0c+a^2}=\left|x_0\frac{c}{a}+a\right|$$

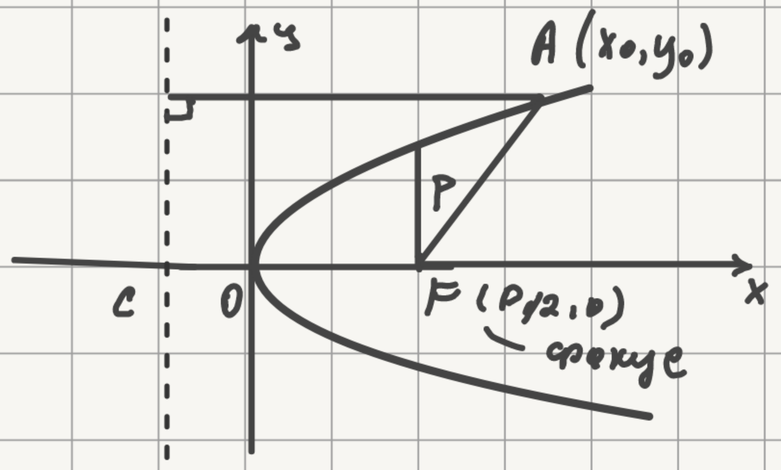
$y_0=\left(\frac{x_0}{a^2}-1\right)b^2$

$$\cos(\overrightarrow{F_2A},\vec{n})=\frac{\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{x_0c}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}}{\left|\frac{x_0}{a}c-a\right||\vec{n}|}=\frac{-\frac{cx_0}{a^2}+1}{a\left|\frac{cx_0}{a^2}-1\right||\vec{n}|}=-\frac{1}{a|\vec{n}|}$$

△.

III. Парабола

Опр. Парабола – г.м.т., в нек. системе к-т задается каноническим ур-нием $y^2=2px$, $p>0$.



$x=-\frac{p}{2}$ – директриса

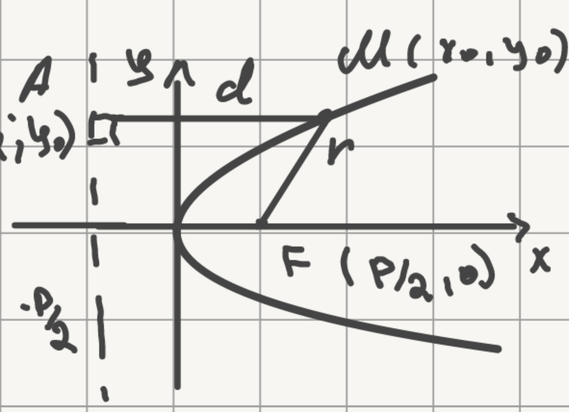
Ось абсцисс (сим-ия) – ось параболы

$|OF|=p/2$ – фокусное расстояние

p – фок. параметр.

$\varepsilon=1$ (для всех) – согласование

Директориальное св-во: Парабола – г.м.т., у которых расстояние до фокуса и до директрисы равны. $r=d$



▷ $|MF|=\sqrt{(x_0-p/2)^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^2-px_0+\frac{p^2}{4}+2px_0}=x_0+p/2$

$|MA|=\sqrt{(x_0+p/2)^2}=x_0+p/2$

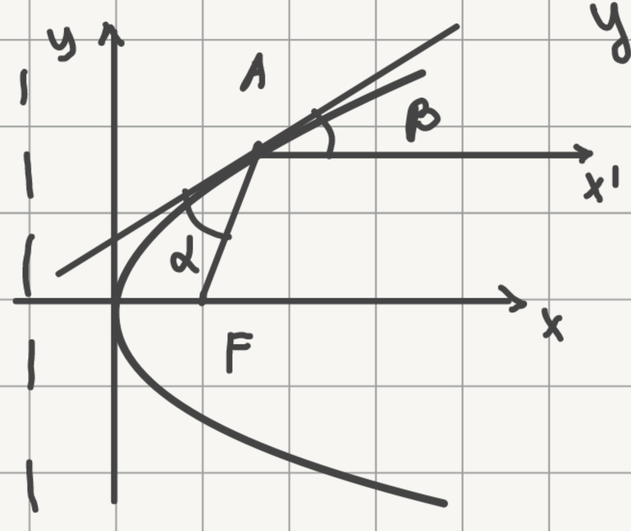
Обратно, пусть $r=d$ $\quad \sqrt{(x-p/2)^2+y^2}=x+p/2\ \uparrow^2$

$\Rightarrow y^2=2px$

△

Оптическое св-во: угол между касательной и фок. радиусом равен углу м/у касат. и осью Ox', провед. из т.касания $\parallel Ox$

$\alpha = \beta$.



$yy_0 = p(x - x_0)$

▷ $\vec{n} = \{p, -y_0\}$ $\quad \ell = \{1, 0\}$

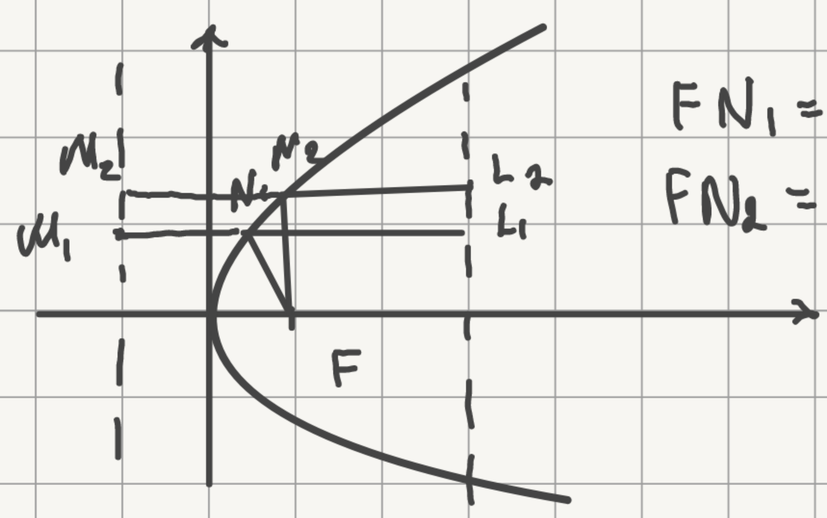
$\overrightarrow{AF} = (p/2 - x_0, -y_0)$

$$\cos(\overrightarrow{AF}, \vec{n}) = \frac{p^2/2 - px_0 + y_0^2}{(x_0 + p/2)|n|} = \frac{p(p/2 + x_0)}{(x_0 + p/2)|n|} = \frac{p}{|n|}$$

$$\sqrt{(p/2 - x_0)^2 + y_0^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - px_0 + x_0^2 + 2px_0} = \sqrt{(x_0 + p/2)^2}$$

$$\cos(e, n) = \frac{p}{|n|}$$

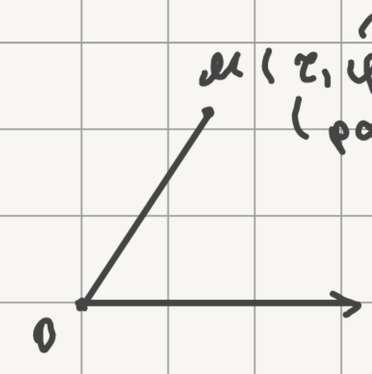
Фокальное св-во:



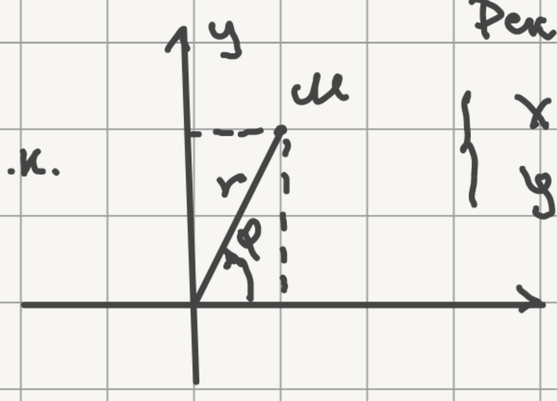
$FN_1 = M_1N_1$, $FN_2 = N_2M_2$ $\Rightarrow$ $FN_1 + N_1L_1 = M_1N_1 + N_1L_1$, $FN_2 + N_2L_2 = M_2N_2 + N_2L_2$

◁

Уравнение в полярной с.к.



+ д.с.к.



Рек.к-ты ч/з полярные:

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

В кан-ве нач. точки – один из фокусов, ось вдоль фок.оси

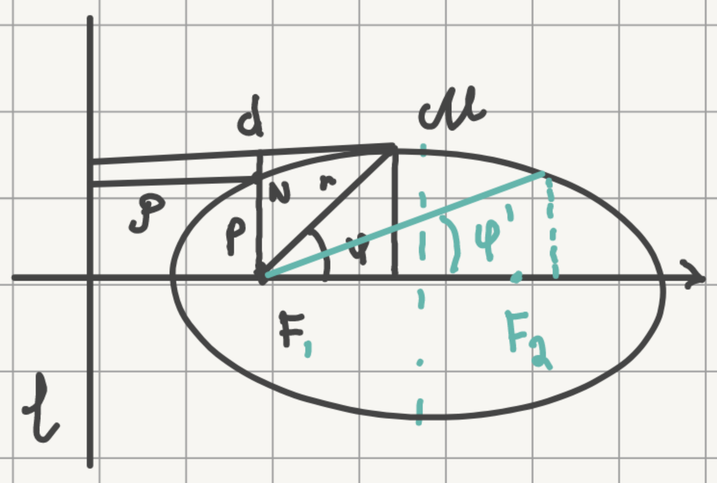
M - точка на кривой, ее к-ты (r, φ); FN – перп. к фок. прямой, p – фок-пар.

Напишем дир-св-во для M и N:

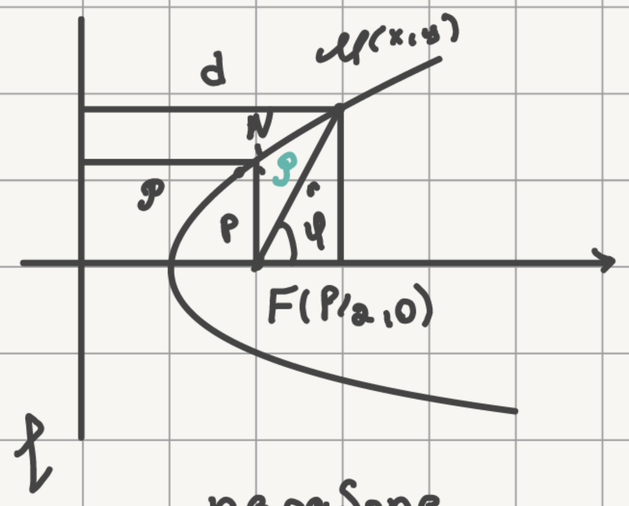
$\frac{r}{d} = \varepsilon$; $\frac{r}{\rho} = \varepsilon$, $r = \varepsilon d = \varepsilon(r\cos\varphi + p) = \varepsilon r\cos\varphi + p$

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$ – ур. кривой 2-го порядка

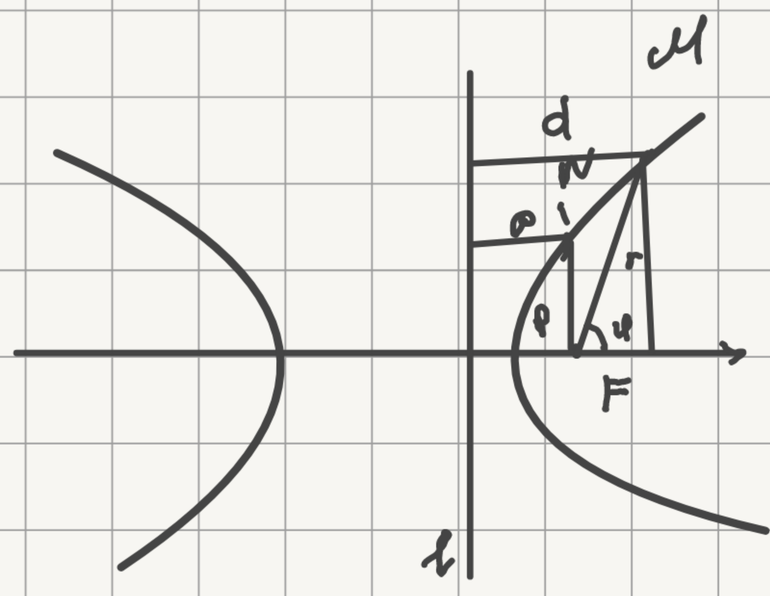
$r - \varepsilon r\cos\varphi = p \Leftrightarrow r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = p$



эллипс



парабола



гипербола

$\rho_1 = a + \varepsilon x$ (из g. об-ва)

$\rho_2 = a - \varepsilon x$

$\cos\varphi' = \frac{x+c}{a+\varepsilon x}$

$(a+\varepsilon x)\cos\varphi' = x + c$

$\varepsilon\rho\cos\varphi' = \varepsilon x + \varepsilon c$

$\varepsilon\rho\cos\varphi' = \rho - a + \varepsilon c$

$\rho = \frac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon\cos\varphi'} = \frac{\rho}{1-\varepsilon\cos\varphi'}$

$a - \varepsilon c = a - c\frac{c}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p.$

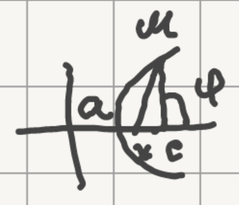
$\cos\varphi = \frac{x - p/2}{\rho}$

$\rho\cos\varphi = x - p/2$

$\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$

$\rho_1 = \varepsilon x + a$

$\rho_2 = \varepsilon x - a$



$\cos\varphi = \frac{c - x}{\rho}$

$c^2 = a^2 + b^2$

$\varepsilon\cos\varphi\rho = \varepsilon c - \varepsilon x$

$\varepsilon\cos\varphi\rho = \varepsilon c - a - \rho$

$\varepsilon\cos\varphi\rho = p - \rho$

$\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$

4) Уравнение касательных к эллипсу, гиперболе, параболе. Асимптоты гиперболы.

① **Касательная к параболе** – это прямая, непарал-ая оси параболы, имеющая с параболой 1 общую точку.

(x_0, y_0) – т. касания $y^2 = 2px$ и прямой $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$, $m \neq 0$

Имеем: $(y_0 + mt)^2 = 2p(x_0 + lt) \Leftrightarrow y_0^2 + 2my_0t + m^2t^2 = 2px_0 + 2plt \Leftrightarrow$

$m^2t^2 + 2t(my_0 - pl) = 0$ – один корень при $my_0 - pl = 0 \Leftrightarrow l = m\frac{y_0}{p}$

Канон. ур-ие касат. к параболе имеет вид

$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Leftrightarrow y_0(y - y_0) = p(x - x_0)$

$\Uparrow$

$yy_0 = p(x + x_0)$

Касательная к эллипсу и гиперболе:

1) (x_0, y_0) т. кас. эл. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямой l: $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$

Имеем $\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} = 1$

$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + 2t\left(\frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2}\right) + t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) = 1$ – один корень (надо)

$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

$\Downarrow$

$\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2} = 0$

можно положить $l = \frac{y_0}{b^2}$, $m = \frac{-x_0}{a^2}$

Канон. ур-ие: $\frac{x - x_0}{y_0/b^2} = \frac{y - y_0}{-x_0/a^2} \Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$

$\Updownarrow$

$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$