$$F(x,y) = \left((\tilde x\ \tilde y) + (x_0\ y_0)\right)A\left(\begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right) + 2b^T\left(\begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right) + c =$$

$$= (\tilde x\ \tilde y)A\begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\end{pmatrix} + (\tilde x\ \tilde y)A\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + (x_0\ y_0)A\begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\end{pmatrix} + 2b^T\begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\end{pmatrix} + \underbrace{(x_0\ y_0)A\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + 2b^T\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + c}_{F(x_0,y_0)} =$$

$$= (\tilde x\ \tilde y)A\begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\end{pmatrix} + 2\left((x_0\ y_0)A + b^T\right)\begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\end{pmatrix} + F(x_0,y_0) =$$

$$= (\tilde x\ \tilde y)A\begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\end{pmatrix} + 2\left(A\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+b\right)^T\begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\end{pmatrix} + F(x_0,y_0) = \tilde F(\tilde x,\tilde y) = 0.$$

Если $A\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+b=0$, то пропадают члены с первой степенью,

$$\tilde F(\tilde x,\tilde y) = (\tilde x\ \tilde y)A\begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\end{pmatrix} + F(x_0,y_0)=0$$

Заметим, что $\tilde F(\tilde x,\tilde y)=0 \Leftrightarrow \tilde F(-\tilde x,-\tilde y)=0$. $\triangleleft$

- Кривая центральная $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
  нет центра симметрии у параболы ($\det A = 0$) и
  у пары совп. и паралл. прямых беск. много реш. $\Rightarrow$ не центр. кривая.

10 Хорды кривой второго порядка. Диаметр, сопряж. направлению. Сопряженные диаметры, пример эллипса.

неасимпт. направление

Опр. Середины семейства параллельных хорд с направ. v: $\langle Av, v\rangle \neq 0$ лежат на одной прямой, которая наз. диаметром.

$\Downarrow$

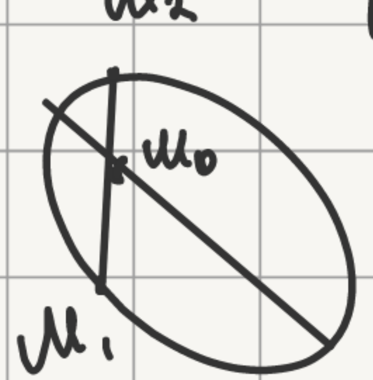
$F(r) = r^TAr + 2b^Tr + c = 0$

имеется прямая $L: r_0 + tv$, проход. ч/з точку (x_0,y_0) в напр. вектора $\begin{pmatrix}l\\ m\end{pmatrix}$

Общие точки K и прямой опред из ур-ия $F(r_0+tv)$:

$\langle Av,v\rangle t^2 + 2\langle Ar_0+b, v\rangle t + F(r_0) = 0$

Рассм. семейство $\parallel$ прямых неасимпт. напр. $u = \begin{pmatrix}l\\ m\end{pmatrix}$



Пусть нек. прямая этого семейства пересек K в точках M_1 и M_2, и пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ — середина $[M_1, M_2]$.

Тогда M_1M_2: $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm\end{cases}$. Пусть t_1 и t_2 — знач. пар-ра t, отвеч. точкам M_1 и M_2:

$\begin{cases} x_1 = x_0 + t_1 l \\ y_1 = y_0 + t_1 m\end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = x_0 + t_2 l \\ y_2 = y_0 + t_2 m\end{cases}$

$\begin{pmatrix}x_1 - x_0\\ y_1 - y_0\end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix}l\\ m\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_2 - x_0\\ y_2 - y_0\end{pmatrix} = t_2\begin{pmatrix}l\\ m\end{pmatrix}$, т.е. $\overrightarrow{M_0M_1} = t_1 u$, $\overrightarrow{M_0M_2} = t_2 u$

Т.к. $\overrightarrow{M_0M_1} = -\overrightarrow{M_0M_2}$, то $t_1 + t_2 = 0$

Для общих точек прямой M_1M_2 и K мы получили ур-ие
$F(r_0+t\upsilon) = \langle A\upsilon,\upsilon\rangle t^2 + 2\langle Ar_0+b,\upsilon\rangle t + F(r_0) = 0$

t_1 и t_2 – корни $\Rightarrow$ по т. Виета $t_1+t_2 = -\dfrac{2\langle Ar_0+b,\upsilon\rangle}{\langle A\upsilon,\upsilon\rangle}$

т.о. $t_1+t_2=0 \Leftrightarrow \langle Ar_0+b,\upsilon\rangle = 0$
$\Rightarrow$ (x_0,y_0) удовл. уравнению ↑

$$\langle Ar_0+b,\upsilon\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l \\ m\end{pmatrix}\right\rangle =$$

$$= l(a_{11}x_0+a_{12}y_0+b_1) + m(a_{12}x_0+a_{22}y_0+b_2) = (a_{11}l+a_{12}m)x_0 + (a_{12}l+a_{22}m)y_0 + (b_1l+b_2m) = 0$$

Таким образом, середины ∥ хорд лежат на одной прямой

$(a_{11}l+a_{12}m)x + (a_{12}l+a_{22}m)y + (lb_1+mb_2) = 0$, которая наз. диаметром K, сопряженным направлению $\begin{pmatrix} l \\ m\end{pmatrix}$.

Напр. вектор ∥ хорд равен $\begin{pmatrix} l \\ m\end{pmatrix}$.
Диаметра: $\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{12}l-a_{22}m \\ a_{11}l+a_{12}m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix} l \\ m\end{pmatrix}$

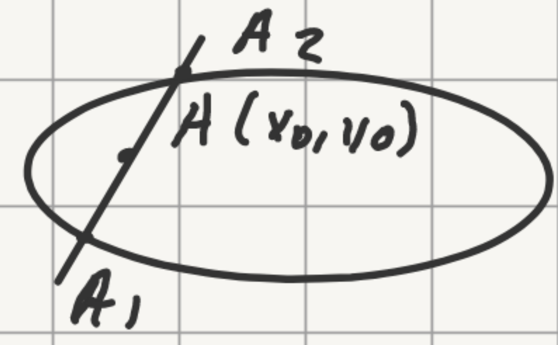
Легко убедиться в том, что $(l\ m)A\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1\end{pmatrix} = 0$: (обозн. $\det A = \delta$)

$$(l\ m)A\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix} l \\ m\end{pmatrix} = (l\ m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a_{12} & -a_{22} \\ a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m\end{pmatrix} = (l\ m)\begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m\end{pmatrix} =$$
$$= \delta\,(l\ m)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m\end{pmatrix} = \delta\,(m\ \ -l)\begin{pmatrix} l \\ m\end{pmatrix} = 0$$

Опр. Векторы $u = \begin{pmatrix} l \\ m\end{pmatrix}$ и $\upsilon = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1\end{pmatrix}$ наз. сопряж. для K, если
$$(l\ m)A\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1\end{pmatrix} = 0.$$

Опр. Диаметры d_1 и d_2 сопряжены, если для каждого из них середины ∥ ему хорд образуют новый диаметр.

Диаметр эллипса. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad a \nearrow (a_1,a_2)$



$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} \Rightarrow \frac{(x_0+a_1t)^2}{a^2} + \frac{(y_0+a_2t)^2}{b^2} = 1$$

$$t^2\left(\frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{b^2}\right) + 2t\left(\frac{a_1x_0}{a^2} + \frac{a_2y_0}{b^2}\right) + \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) - 1 = 0$$

$$\frac{a_1 x_0}{a^2} + \frac{a_2 y_0}{b^2} = 0 \Rightarrow y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a_1}{a_2} x_0, \quad k = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{k} x$$

11 Определение типа кривой по инвариантам и полуинв-ам. „Дорожная карта".

Опр. Функция $I(A, b, c)$ — инвариант, если при любой ортог-ой замене координат $r = Ur' + \beta$ ($r = Ur' + \beta$, где U — орт-ая)

$$I(A', b', c') = I(A, b, c)$$

★ $F(r') = r'^T \underset{\sim}{A'} r' + 2 \underset{\sim}{b'^T} r' + \underset{\sim}{c'}$

Утв. При любых ортог. преобразованиях переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad Q^T Q = E$$

сохр. величины $\underbrace{I_1 = a_{11} + a_{22},\ I_2 = \det A,\ I_3 = \det \mathcal{A}}_{\text{ортогональные инварианты}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}$

Д-во: 2. Пусть $r = Ur' + \beta$, где $U^T = U^{-1}$, тогда:

$$F(r) = r^T A r + 2b^T r + c$$

$$F(Ur' + \beta) = (Ur' + \beta)^T A (Ur' + \beta) + 2b^T (Ur' + \beta) + c =$$

$$= r'^T \underbrace{U^T A U}_{A'} r + \ldots$$

$$A' = U^T A U \Rightarrow |A'| = |A|.$$

3. Аналогично с расширенной матрицей

$$F(x, y) = (x \ y \ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & x_0 \\ u_{21} & u_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{U} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\det \mathcal{U} = \det U$

Делаем замену: $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x} \ \tilde{y} \ 1) \underbrace{\mathcal{U}^T \mathcal{A} \mathcal{U}}_{\tilde{\mathcal{A}}} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det \tilde{\mathcal{A}} = \det(\mathcal{U}^T \mathcal{A} \mathcal{U}) = (\det U)^2 \det \mathcal{A} = \det \mathcal{A}.$$

1. Покажем, что $\operatorname{tr} \tilde{A} = \operatorname{tr} A$.

$$|\tilde{A} - \lambda E| = |A - \lambda E|$$

$$|U^{-1} A U - \lambda U^{-1} U| = |A - \lambda E|$$

$|A - \lambda E| = |A - \lambda E|$ собст. числа сохр.