$$\frac{a_1 x_0}{a^2} + \frac{a_2 y_0}{b^2} = 0 \Rightarrow y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a_1}{a_2} x_0, \quad k = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{k} x$$

11 Определение типа кривой по инвариантам и полуинв-ам. „Дорожная карта".

Опр. Функция $I(A, b, c)$ – инвариант, если при любой ортог-ой замене координат $r = Ur' + \beta$, где U – орт-ая

$$I(A', b', c') = I(A, b, c)$$

★ $F'(r') = r'^T \underset{\sim}{A'} r' + 2\underset{\sim}{b'}^T r' + \underset{\sim}{c'}$

Утв. При любых ортог. преобразованиях переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad Q^T Q = E$$

сохр. величины $\underbrace{I_1 = a_{11} + a_{22}, \ I_2 = \det A, \ I_3 = \det \mathcal{A}}_{\text{ортогональные инварианты}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}$

Д-во: 2. Пусть $r = Ur' + \beta$, где $U^T = U^{-1}$, тогда:

$$F(r) = r^T A r + 2b^T r + c$$

$$F(Ur' + \beta) = (Ur' + \beta)^T A (Ur' + \beta) + 2b^T(Ur' + \beta) + c =$$

$$= r'^T \underbrace{U^T A U}_{A'} r + \ldots$$

$$A' = U^T A U \Rightarrow |A'| = |A|.$$

3. Аналогично с расширенной матрицей

$$F(x,y) = (x \ y \ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & x_0 \\ u_{21} & u_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{U} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\det \mathcal{U} = \det U$

Делаем замену: $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x} \ \tilde{y} \ 1) \underbrace{\mathcal{U}^T \mathcal{A} \mathcal{U}}_{\tilde{\mathcal{A}}} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det \tilde{\mathcal{A}} = \det(\mathcal{U}^T \mathcal{A} \mathcal{U}) = (\det U)^2 \det \mathcal{A} = \det \mathcal{A}.$$

1. Покажем, что $\operatorname{tr} \tilde{A} = \operatorname{tr} A$.

$$|\tilde{A} - \lambda E| = |A - \lambda E|$$

$$|U^{-1} A U - \lambda U^{-1} U| = |A - \lambda E|$$

$|A - \lambda E| = |A - \lambda E|$ собст. числа сохр.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{12})\lambda + \underbrace{|A|}_{\text{сохр.}}$$

$\Rightarrow a_{11}+a_{12}$ тоже сохр.

Утверждение. Если в нек. системе координат уравнение кривой не содерж. одну из переменных, то K - полуинвариант где:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = c\lambda^2 - K_1\lambda + K_2$$

где K_1, K_2 - полуинварианты.
(не меняются, если замена координат без сдвига)

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix}$$

Д-во: Пусть y' отсутствует.

$$a'_{11}x'^2 + 2b_1x' + c = 0$$

$$\begin{cases} x' = \tilde{x} + \mu \\ y' = \tilde{y} + \theta \end{cases}$$

$$K = \begin{vmatrix} a'_{11} & b'_1 \\ b'_1 & c' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & b'_1 \\ b'_1 & c' \end{vmatrix} = a'_{11}c' + b_1'^2$$

$$a'_{11}(\tilde{x}+\mu)^2 + 2b'_1(\tilde{x}+\mu) + c' = 0$$

$$K = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{11}\mu + b'_1 \\ a'_{11}\mu + b'_1 & a'_{11}\mu + 2b'_1\mu + c' \end{vmatrix} = a'_{11}(a'_{11}\mu + 2b'_1\mu + c') - (a_{11}\mu + b'_1)^2 = a'_{11}c' + b_1'^2.$$

Дорожная карта