13 Поверхность второго порядка. Общий вид уравнения, матричный вариант.

Опр. П - поверх-ть 2го порядка, если в некоторой пр. с.к.

$$П: F(x,y,z)=0$$

$$F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$$

$$F(r)=r^TAr+2b^Tr+c,\quad r=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Если менять с.к., то $r=Ur'+\beta$, т.о. опред-ие не зависит от с.к.

14 Приведение общего уравнения к каноническому виду с помощью собственных векторов.

Алгоритм. Хотим получить: $F(x',y',z')=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2$

(Мы знаем, что $A=A^T \Rightarrow \exists U$ - $\overset{\text{орт.}}{\text{матрица}}$: $U^TAU=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$)

Обозн. $A'=U^TAU=U^{-1}AU$

$\exists U$ - ортог. : $U^{-1}AU$ - диаг-ие

$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$

$AU=U\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$

просто все матрица умн. на λ_i

$$\underbrace{A\left(u_1 \mid u_2 \mid u_3\right)}_{\text{каждый столбец это } Au_i}=\left(u_1 \mid u_2 \mid u_3\right)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$$

Как найти векторы?

$Av=\lambda v \Rightarrow (A-\lambda E)v=0 \ (v\neq0)$

- Ищем λ из хар. ур. $|A-\lambda E|$ и потом по $(A-\lambda E)v=0$ находим v.

Получаем $\begin{cases}Au_1=\lambda_1u_1\\Au_2=\lambda_2u_2\\Au_3=\lambda_3u_3\end{cases}$

Таким образом столбцы матрицы U, приводящей A к диаг. виду, явл. ортонормированными собственными векторами A.

Этап I. Избавление от a_{12}, a_{13}, a_{23}.

Сделаем замену переменных $r=Q\tilde{r}$, где Q-ортог. матр.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(q_1 \mid q_2 \mid q_3\right)\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\\\tilde{z}\end{pmatrix}$$

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}=\tilde{A}$$

$$F(\tilde{r})=\tilde{r}^T\tilde{A}\tilde{r}+2\tilde{b}^T\tilde{r}+\tilde{c}=0$$

$$F(\tilde{r})=\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2+2\mu_1\tilde{x}+2\mu_2\tilde{y}+2\mu_3\tilde{z}+\nu=0$$

$$\tilde{b}=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\end{pmatrix},\quad \tilde{c}=\nu$$

Этап 2. Избавление от μ_1, μ_2, μ_3 с помощью || переноса

Если $\lambda_1\neq0$, то делаем замену $x'=\tilde{x}+\frac{\mu_1}{\lambda_1}$

$$\left(\lambda_1\left(\tilde{x}^2+2\frac{\mu_1\tilde{x}}{\lambda_1}\right)=\lambda_1\left(\tilde{x}+\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2-\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2\right)$$