13 Поверхность второго порядка. Общий вид уравнения, матричный вариант.

Опр. Π — поверх-ть 2го порядка, если в некоторой пр. с.к.

$$\Pi: F(x,y,z)=0$$

$$F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$$

$$F(r)=r^TAr+2b^Tr+c, \quad r=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Если менять с.к., то $r=Ur'+\beta$, т.о. опред-ие не зависит от с.к.

14 Приведение общего уравнения к каноническому виду с помощью собственных векторов.

Алгоритм. Хотим получить: $F(x',y',z')=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2$

(Мы знаем, что $A=A^T \Rightarrow \exists U$ – $\overset{\text{орт.}}{\text{матрица}}$: $U^TAU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$)

Обозн. $A'=U^TAU=U^{-1}AU$

$\exists U$ - ортог. : $U^{-1}AU$ - диаг-ая

$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$

$AU=U\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$

$$\underbrace{A\left(u_1 \,\vdots\, u_2 \,\vdots\, u_3\right)}_{\text{каждый столбец это } Au_i}=\left(u_1 \,\vdots\, u_2 \,\vdots\, u_3\right)\overbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}}^{\text{просто вся матрица умн. на } \lambda_i}$$

Получаем $\begin{cases}Au_1=\lambda_1u_1\\Au_2=\lambda_2u_2\\Au_3=\lambda_3u_3\end{cases}$

Таким образом столбцы матрицы U, приводящей A к диаг. виду, явл. ортонормированными собственными векторами A.

Как найти векторы?

$Av=\lambda v \Rightarrow (A-\lambda E)v=0 \; (v\neq0)$

- Ищем λ из хар. ур. $|A-\lambda E|$ и потом по $(A-\lambda E)v=0$ находим v.

Этап I. Избавление от a_{12}, a_{13}, a_{23}.

Сделаем замену переменных $r=Q\tilde r$, где Q-ортог. матр.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(q_1 \,\vdots\, q_2 \,\vdots\, q_3\right)\begin{pmatrix}\tilde x\\\tilde y\\\tilde z\end{pmatrix}$$

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}=\tilde A$$

$$F(\tilde r)=\tilde r^T\tilde A\tilde r+2\tilde b^T\tilde r+\tilde c=0$$

$$F(\tilde r)=\lambda_1\tilde x^2+\lambda_2\tilde y^2+\lambda_3\tilde z^2+2\mu_1\tilde x+2\mu_2\tilde y+2\mu_3\tilde z+\nu=0$$

$$\tilde b=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\end{pmatrix}, \quad \tilde c=\nu$$

Этап 2. Избавление от μ_1, μ_2, μ_3 с помощью $\parallel$ переноса

Если $\lambda_1\neq0$, то делаем замену $x'=\tilde x+\frac{\mu_1}{\lambda_1}$

$$\left(\lambda_1\left(\tilde x^2+2\frac{\mu_1\tilde x}{\lambda_1}\right)=\lambda_1\left(\tilde x+\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2-\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2\right)$$

Аналогично если $\lambda_2 \vee \lambda_3 = 0$ делаем перенос

$$y' = \tilde{y} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} \quad \text{или} \quad z' = \tilde{z} + \frac{\mu_3}{\lambda_3}$$

λ_1	λ_2	λ_3	ν		
+	+	+	−	эллипсоид	1
			+	мнимый эллипсоид	2
			0	мнимый конус	3
+	+	−	−	однопол. гиперболоид	4
			+	двуполостный гиперболоид	5
			0	конус	6

Будем различать три случая:

1) все $\lambda_i \neq 0$: после переноса имеем ур-ие

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \nu' = 0$$

2) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$

Имеем $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\mu \tilde{z} + \nu' = 0$

Пусть $\mu \neq 0$, тогда сделаем следующий финт ушами

$$z' = \tilde{z} + \frac{\nu'}{2\mu}.$$

Имеем $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\mu z' = 0$

Мы пришли к ур-ию параболоида: $\lambda_1\lambda_2 > 0$ – эллипт. 7
$\lambda_1\lambda_2 < 0$ – гипербол. 8

Если $\mu = 0$, то получается
9. Эллип. цилиндр
10. Мнимый эл. цилиндр
11. Пара мнимых плоскостей
12. Гипер. цилиндр.
13. Пара пересек. пл-ей.

3) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$

Имеем $\lambda_1 x'^2 + 2\mu_2 \tilde{y} + 2\mu_3 \tilde{z} + \nu' = 0$

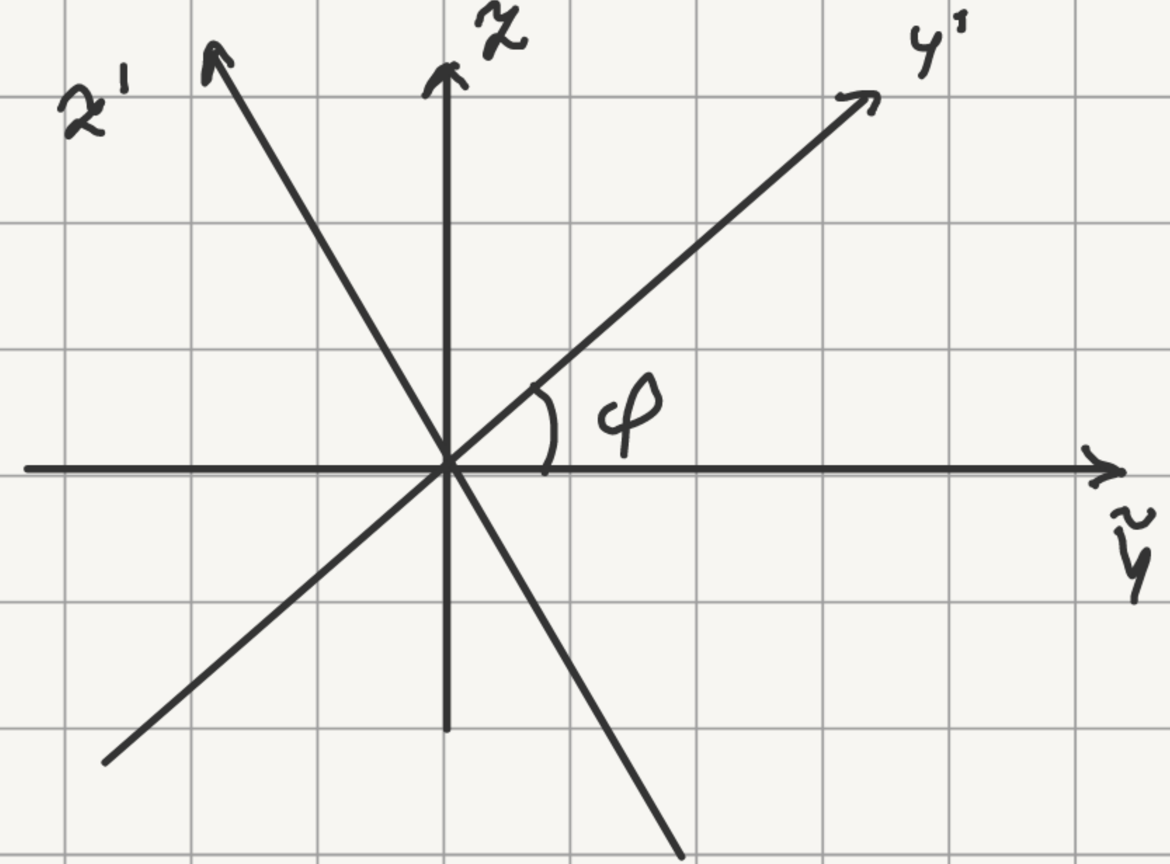
Если $\mu_2 \cdot \mu_3 = 0$, то приводим к
14. Параболич. цилиндр $y^2 = 2px$
15. Пара $\parallel$ пл-ей $y^2 - 8^2 = 0$
16. Пара мнимых пл-ей $y^2 + 6^2 = 0$
17. Пара совп. пл-ей $y^2 = 0$

Если $\mu_2, \mu_3 = 0$

Сделаем доп. поворот в пл-ти $(\tilde{y}, \tilde{z})$, избавившись от одного из μ_2, μ_3 и приведем ур. пов-ти к канон. виду 14.

Делаем поворот вокруг оси x'.

$$\tilde{y} = \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}} y' + \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}} z'$$



$$\tilde{z} = -\frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}} y' + \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}} z'$$

Это поворот на $\cos\varphi = \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}}$, $\sin\varphi = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}}$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_2}{r} & \frac{\mu_3}{r} \\ 0 & -\frac{\mu_3}{r} & \frac{\mu_2}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} \tilde{x} &= x' \\ \tilde{y} &= \frac{\mu_2}{\sqrt{\ }} y' + \frac{\mu_3}{\sqrt{\ }} z' \\ \tilde{z} &= -\frac{\mu_3}{\sqrt{\ }} y' + \frac{\mu_2}{\sqrt{\ }} z' \end{aligned}$$

$$\lambda_1 x'^2 + 2\mu_2 \left(\frac{\mu_2}{\sqrt{\ }} y' + \frac{\mu_3}{\sqrt{\ }} z' \right) + 2\mu_3 \left(-\frac{\mu_3}{\sqrt{\ }} y' + \frac{\mu_2}{\sqrt{\ }} z' \right)$$

$$\lambda_1 x'^2 + y'\left(\frac{2\mu_2^2}{\sqrt{\ }} + \frac{2\mu_3^2}{\sqrt{\ }}\right) = 0$$

$$\lambda_1 x'^2 + y' \, 2\sqrt{\mu_2^2+\mu_3^2} = 0$$ — параболический цилиндр.

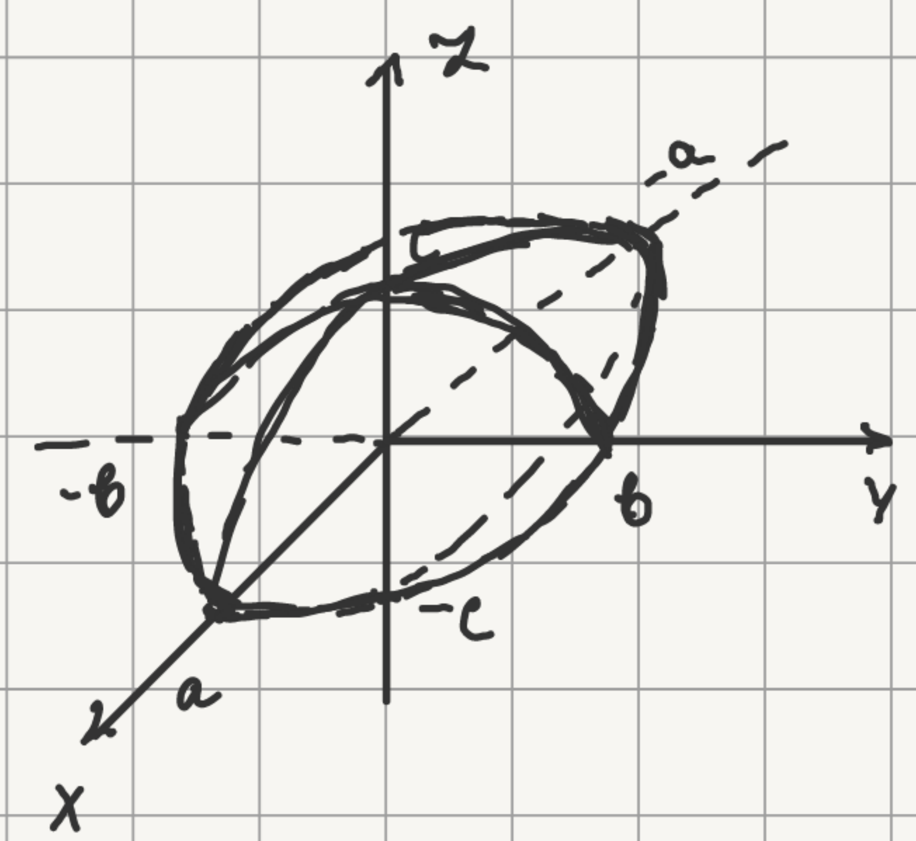
Таким образом мы доказали теорему о том, что $\forall$ ПВП можно привести к канон. виду, осуществляя поочередный переход к другой пр.с.к.

15 Классификация пов-ей 2го порядка. Канон. ур-ие, картинки, осн. геом. св-ва

I. 1 Все λ: одного знака, $\nu \neq 0$ и другого с ними знака

эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$a \geq b \geq c > 0$



$a=b=c$ сфера

$a>b>c$ трехосный эллипсоид (батон ◡̈)

$a>b=c$ эллипсоид вращения (вокруг Ox)

Свойства: $(0,0,0)$ - центр симметрии

Ox, Oy, Oz - плоскости симметрии

если рассматривать разные сечения параллельными осям плоскостями типа $x=h$, $y=h$, $z=h$

у нас будут ур-ие

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

(сечения)

в зависимости от ситуации:

1) $|h|>c$ — мнимая кривая
2) $|h|=c$ — точка $(0,0,\pm c)$
3) $|h|<c$ — эллипс (чем больше $|h|$, тем меньше полуоси)

2 все λ: одного знака, $\nu=0$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ точка

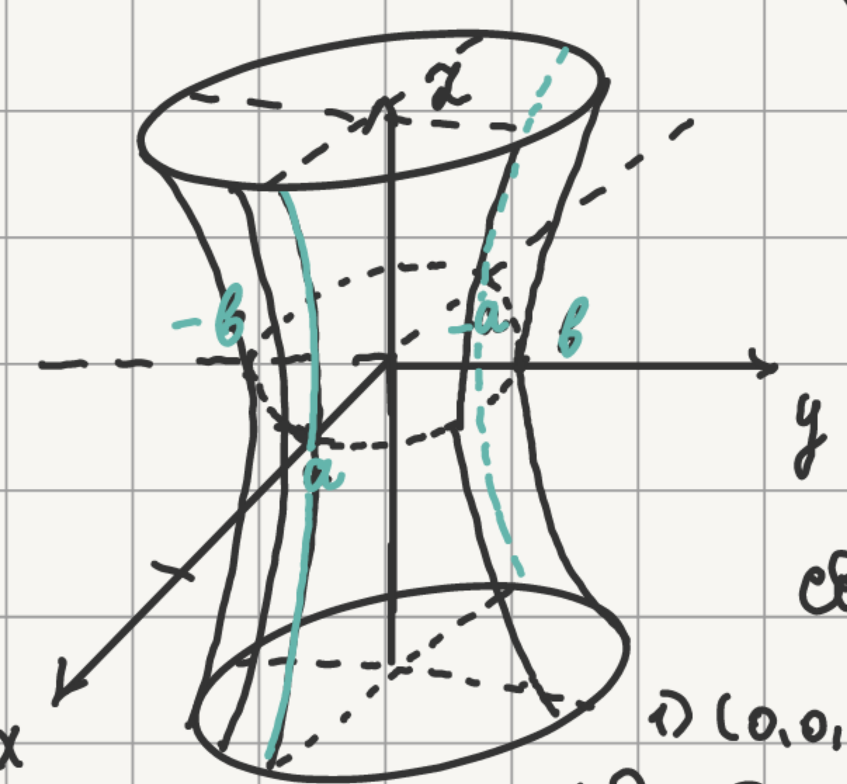
3 все λ: одного знака, ν того же

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ мнимый эллипсоид

4 $++-$, $\nu<0$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ однополостный гиперболоид

$a \geq b > 0$, $c>0$



Свойства:

1) $(0,0,0)$ - центр сим. xOy, xOz, yOz - пл-ти симметрии.

2) любая пл-ть $z=h$ пересек. гиперболоид по эллипсу с полуосями $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$

Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, получ. при $h=0$ наз. горловым эллипсом гиперболоида

• Рассмотрим сечение $x=h$

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)}-\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)}=1$$

а) $|h|<a$ — гипербола с дейст. осью $\parallel Oy$
б) $|h|>a$ — гипербола с дейст. осью $\parallel Ox$
в) $|h|=a$ — пара прямых

Аналогично с $y=h$

3) Если $a=b$, то однопол-ый гип-д явл. пов-тью вращения.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (вращаем гип-лу вокруг Oz)