$$\lambda_1 x'^2 + y'\left(\frac{2\mu_2^2}{\sqrt{\ }} + \frac{2\mu_3^2}{\sqrt{\ }}\right) = 0$$

$$\lambda_1 x'^2 + y' \, 2\sqrt{\mu_2^2+\mu_3^2} = 0$$ — параболический цилиндр.

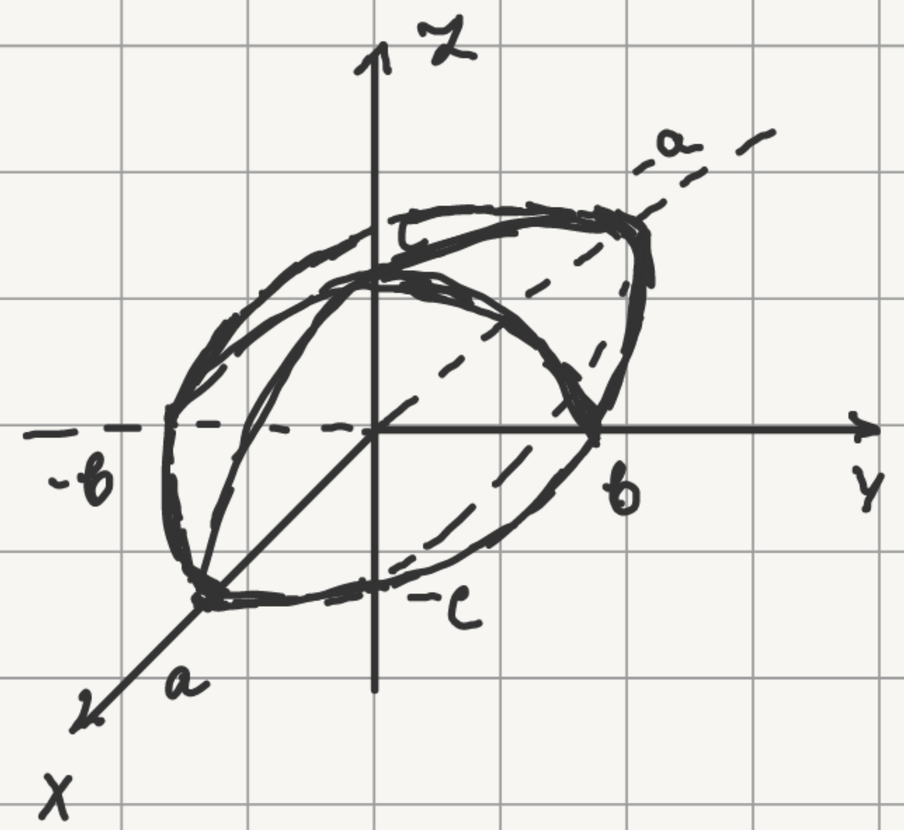
Таким образом мы доказали теорему о том, что $\forall$ ПВП можно привести к канон. виду, осуществляя последующий переход к другой пр.с.к.

## 15 Классификация пов-ей 2го порядка. Канон. ур-ие, картинки, осн. геом. св-ва

I. ① Все $\lambda$: одного знака, $\nu \neq 0$ и другого с ними знака

эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$a \geq b \geq c > 0$




$a=b=c$ сфера

$a>b>c$ трехосный эллипсоид (батон ☺)

$a>b=c$ эллипсоид вращения (вокруг $Ox$)

Свойства: $(0,0,0)$ - центр симметрии

$Ox, Oy, Oz$ — плоскости симметрии

если рассматривать разные сечения параллельными осям плоскостями типа $x=h$, $y=h$, $z=h$

у нас будут ур-ие

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

(сечения)

в зависимости от ситуации:

1) $|h|>c$ — мнимая кривая

2) $|h|=c$ — точка $(0,0,\pm c)$

3) $|h|<c$ — эллипс (чем больше $|h|$, тем меньше полуоси)

② все $\lambda$: одного знака, $\nu=0$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ точка

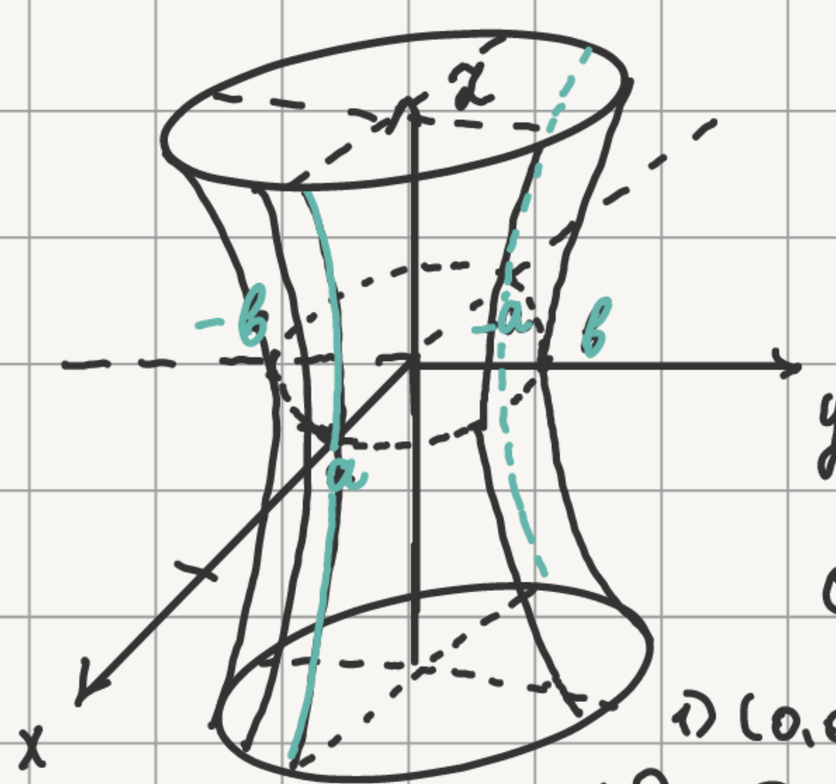
③ все $\lambda$: одного знака, $\nu$ того же

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ мнимый эллипсоид

④ $++-$, $\nu<0$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ однополостный гиперболоид

$a \geq b > 0$, $c>0$




Свойства:

1) $(0,0,0)$ — центр сим.

$xOy, xOz, yOz$ — пл-ти симметрии.

2) любая пл-ть $z=h$ пересек. гиперболоид по эллипсу с полуосями

$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$

Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, получ. при $h=0$

наз. горловым эллипсом гиперболоида

• Рассмотрим сечение $x=h$

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

а) $|h|<a$ — гипербола с дейст. осью $\parallel Oy$

б) $|h|>a$ — гипербола с дейст. осью $\parallel Oz$

в) $|h|=a$ — пара прямых

Аналогично с $y=h$

3) Если $a=b$, то однопол-ый гип-д явл. пов-тью вращения.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (вращаем гип-лу вокруг $Oz$)

16

## Уровнейная формула $F(r_0 + t v) = \ldots$
## Прямолинейные образующие: общий случай, случаи однопол-го гип. и гип. пар.

**Опр.** Пусть $P$ – пов-ть $2^{го}$ порядка, прямая $\ell$ – прямолин. обр-ая, если $\ell \subseteq P$.

**Теорема.** Прямая $r_0 + tv$, где $r_0 \in \Pi$ – прямолин. обр-ая, если $\langle Av, v\rangle = 0$, $\langle Ar_0 + b, v\rangle = 0$.

**Д-во:** $r = r_0 + tv$, тогда ур-ие $F(r_0 + tv) = 0 \quad \forall t$

Тогда: $F(r_0 + tv) = \langle Av, v\rangle t^2 + 2\langle Ar_0 + b, v\rangle t + F(r_0) = 0$

$\Rightarrow \quad \langle Av, v\rangle = 0$ и $\langle Ar_0 + b, v\rangle = 0$.

**Замечание:** прямолин. обр-ие есть у:

1) цилиндр. пов-ти
2) конус
3) однопол-ый гиперболоид
4) гиперболич. параболоид

**Теорема.** Через каждую точку однополостного гип. проходит 2 семейства прямолин. обр-их.

**Д-во:** Пусть $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & \\ & \frac{1}{b^2} & \\ & & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $P_0 \in \Pi$, $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, пусть $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ – вектор обр-ей

$$\begin{cases} \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} = 1 & (1) \\[2mm] \dfrac{v_x^2}{a^2} + \dfrac{v_y^2}{b^2} - \dfrac{v_z^2}{c^2} = 0 \quad (\langle Av, v\rangle = 0) & (2) \\[2mm] \dfrac{x_0 v_x}{a^2} + \dfrac{y_0 v_y}{b^2} - \dfrac{z_0 v_z}{c^2} = 0 & (3) \end{cases}$$

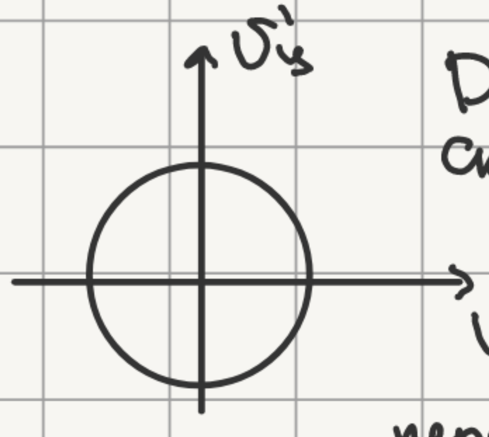
Найдем $v$: сделаем преобр-ие (для удобства) $\frac{x}{a} = x'$, $\frac{y}{b} = y'$, $\frac{z}{c} = z'$ и т.д.

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1 \\ v_x'^2 + v_y'^2 - v_z'^2 = 0 \\ x_0 v_x' + y_0' v_y' - z_0' v_z' = 0 \end{cases}$$

$\to$ если $v_z = 0$, то $v = 0 \Rightarrow v_z \neq 0$
можно считать $v_z = 1$

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1 \\ v_x'^2 + v_y'^2 - 1 = 0 \\ x_0 v_x' + y_0' v_y' - z_0' v_z' = 0 \end{cases}$$

В коорд. $v_x, v_y$ изобразим 2ое ур.




Для того, чтобы понять сколько будет реш. у всей системы, найдем кол-во пересечений ур. 2 и 3

Для этого найдем расст. от (3) до
Если $\rho((3), 0) < 1$, то (2) и (3) будут иметь 2 точки пересечения $\rho = \dfrac{|-z_0'|}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}} = \dfrac{|-z_0'|}{\sqrt{z_0'^2 + 1}} < 1$

Значит, через каждую точку $\Pi$ проходит ровно 2 прямолин. обр.

Найдем ур-ие образующих:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

Пусть $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}\in\Pi$, тогда $\exists\alpha,\beta$:

$$L_1:\begin{cases}\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)\alpha=\left(1-\frac{y_0}{b}\right)\cdot\beta\\ \left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\cdot\beta=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\cdot\alpha\end{cases}\qquad L_2:\begin{cases}\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)\gamma=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\theta\\ \left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\theta=\left(1-\frac{y_0}{b}\right)\gamma\end{cases}$$

$\alpha,\beta\neq 0$ — I семейство; $\gamma,\theta\neq 0$ — II семейство

**Теорема.** Через каждую точку гипер б. параболоида проходит 2 семейства прямолин. обр-х.

**Д-во:** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$

Без огр. общности положим $a=b=1$

$x^2-y^2=2z$

Пусть $(x_0,y_0,z_0)\in\Pi$, тогда $x_0^2-y_0^2=2z_0$

Пусть $v=\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$ — искомый вектор образующей, тогда:

$$\begin{cases}x_0^2-y_0^2-2z_0=0\\ v_x^2-v_y^2=0\\ x_0v_x-y_0v_y-v_z=0\end{cases}\to v_y\neq 0\Rightarrow \text{пусть } v_y=1,\text{ тогда } v_x=\pm 1$$

$v_z=x_0v_x-y_0v_y=\pm x_0-y_0$

То есть имеем ровно два вектора:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\x_0-y_0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\1\\-x_0-y_0\end{pmatrix}$$

**Замечание:** напр. вектор пр. обр. можно найти еще так:

$$\begin{cases}\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}=\lambda\\ \lambda\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)=2z_0\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}=\mu\\ \mu\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)=2z_0\end{cases}$$