$$\lambda_1 x'^2 + y'\left(\frac{2\mu_2^2}{\sqrt{\ }} + \frac{2\mu_3^2}{\sqrt{\ }}\right) = 0$$

$$\lambda_1 x'^2 + y'\, 2\sqrt{\mu_2^2+\mu_3^2} = 0$$ — параболический цилиндр.

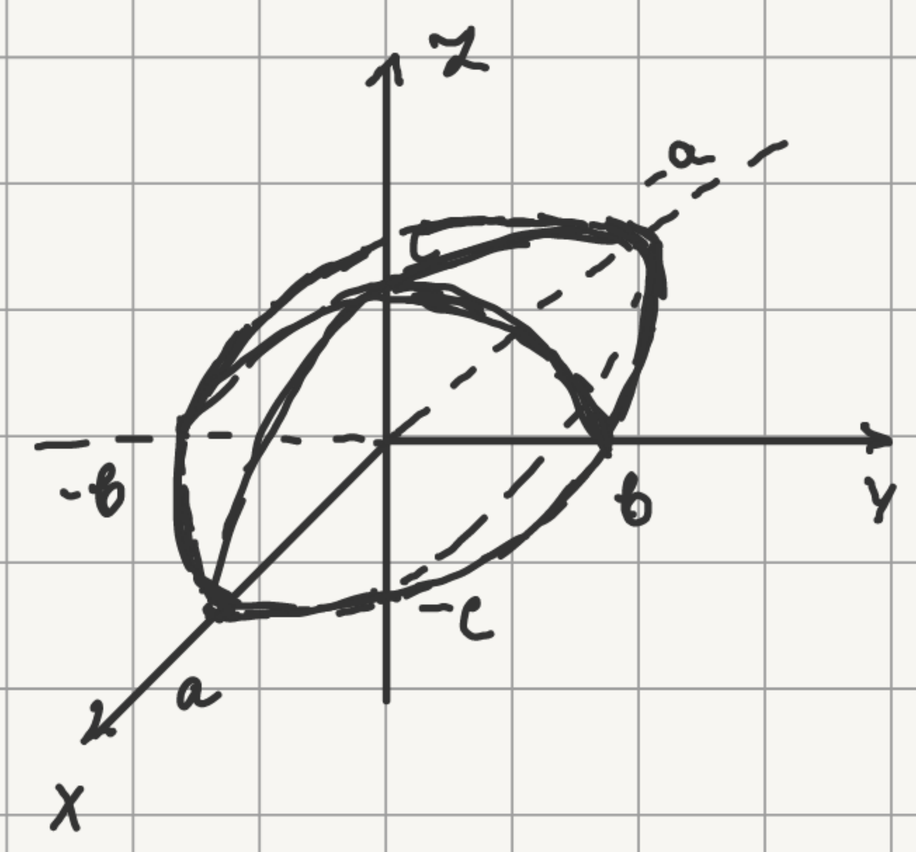
Таким образом мы доказали теорему о том, что $\forall$ ПВП можно привести к канон. виду, осуществляя последующий переход к другой пр.с.к.

15 Классификация пов-ей 2го порядка. Канон. ур-ие, картинки, осн. геом. св-ва

I. ① Все λ: одного знака, $\nu \neq 0$ и другого с ними знака

эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$a \geq b \geq c > 0$



$a=b=c$ сфера

$a>b>c$ трехосный эллипсоид (батон ◡̈)

$a>b=c$ эллипсоид вращения (вокруг Ox)

Свойства: $(0,0,0)$ - центр симметрии

Ox, Oy, Oz — плоскости симметрии

Если рассматривать разные сечения параллельными осям плоскостями типа $x=h$, $y=h$, $z=h$

у нас будут ур-ия

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

(сечения)

в зависимости от ситуации:

1) $|h|>c$ — мнимая кривая
2) $|h|=c$ — точка $(0,0,\pm c)$
3) $|h|<c$ — эллипс (чем больше $|h|$, тем меньше полуоси)

② все λ: одного знака, $\nu=0$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ точка

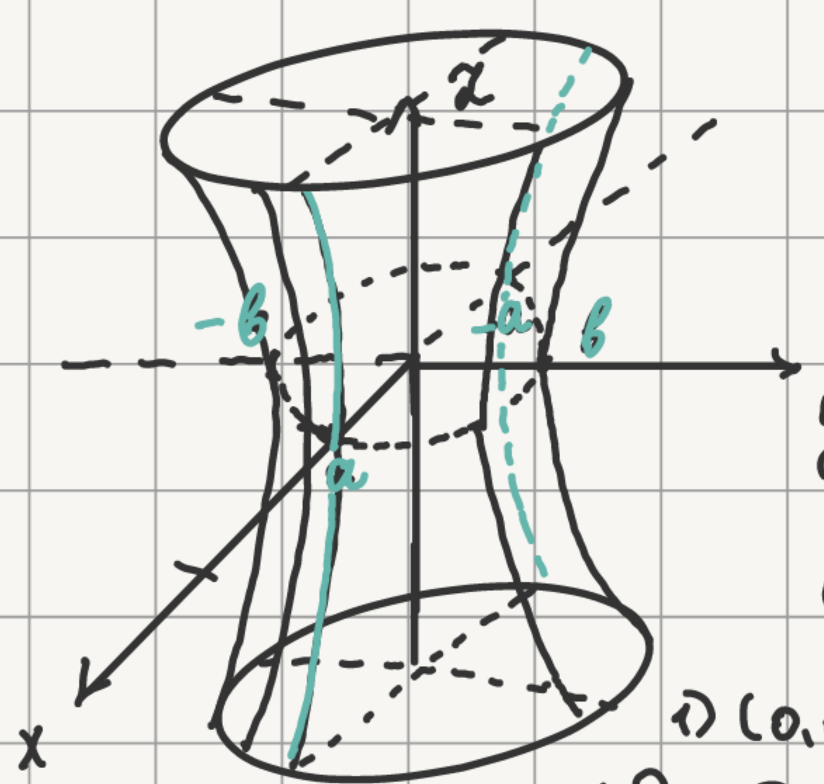
③ все λ: одного знака, ν того же

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ мнимый эллипсоид

④ $++-$, $\nu<0$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ однополостный гиперболоид

$a \geq b > 0$, $c>0$



Свойства:

1) $(0,0,0)$ − центр сим. xOy, xOz, yOz − пл-ти симметрии.

2) любая пл-ть $z=h$ пересек. гиперболоид по эллипсу с полуосями

$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$

Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, получ. при $h=0$ наз. горловым эллипсом гиперболоида

• Рассмотрим сечение $x=h$

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

а) $|h|<a$ — гипербола с дейст. осью $\parallel Oy$

б) $|h|>a$ — гипербола с дейст. осью $\parallel Ox$

в) $|h|=a$ — пара прямых

Аналогично с $y=h$

3) Если $a=b$, то однопол-ый гип-д явл. пов-тью вращения.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (вращаем гип-лу вокруг Oz)

17 Асимптотические направления, центр симметрии поверхности.

Теорема: $\underset{(0,0,0)}{O}$ — центр симметрии $\Pi: r^TAr + 2b^Tr + c \iff b = 0$

Д-во: $\Leftarrow$ $P \in \Pi$ $\quad F(\overset{\text{к-та } P}{r}) = 0$

$$F(-r) = (-r)^TA(-r) + c = r^TAr + c = 0 \Rightarrow (-r) \in \Pi.$$

$\Rightarrow$ O — центр. симм.

$\Rightarrow$ $F(r) = 0$

Пусть $b \neq 0$ $\forall r \in \Pi$, $(-r) \in \Pi$.

$r^TAr + 2b^Tr + c = 0 \Rightarrow r^TAr - 2b^Tr + c = 0$

$\Rightarrow b^Tr = 0$

$b \neq 0$, $b^Tr = 0$ плоскость: $b_1x + b_2y + b_3z = 0$ проходит ч/з O.

Делаем вывод, что все точки Π лежат в пл-ти

Перейдем в x', y', z' так, чтобы ур-ие стало $z' = 0$:

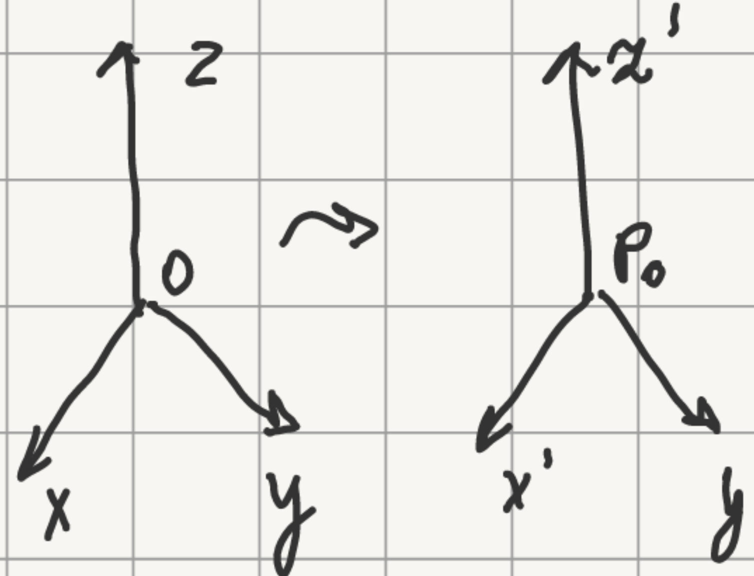
$r = Ur'$

$\tilde{A}\tilde{r} + \tilde{b} = 0$, т.к. $\tilde{r} = 0$ — центр, то $\tilde{b} = 0$.

Вернемся к x, y, z, т.к. $r = Ur'$ и $\tilde{b} = 0 \Rightarrow b = 0$.

Теорема. Π — пов-ть, $F(r) = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ — центр Π, если $Ar_0 + b = 0$.

Д-во: $\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \\ z = z_0 + z' \end{cases} \iff r = r_0 + r'$



$r^TAr + 2b^Tr + c = 0$

$(r_0 + r')^TA(r_0 + r') + 2b^T(r_0 + r') + c = 0$

$\ldots + r'^TAr_0 + r_0^TAr' + 2b^Tr' + \ldots = 0$

т.к. $A^T = A$

$2r_0^TAr' + 2b^Tr'$

$2(r_0^TA + b^T)r' = 2(Ar_0 + b)^Tr'$

$\Downarrow$

$b' = Ar_0 + b$

в силу пред-ей т-ы $b' = 0 \Rightarrow Ar_0 + b = 0$.

Опр. Вектор $u \neq 0$ наз. асимптотическим для Π, если $u^TAu = 0$.

Замечание: по каноническим ур. пов-тей можно изучать асимпт. векторы

Пример: для пов-ей вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 (\pm 1)$

асимпт. векторы задаются ур-ием $\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} = 0$ и обр. мнимый конус