18 Касательные плоскости к поверхности.

Рассм. ПВП $F(r) = r^T A r + 2b^T r + c = 0$

и прямую $r = r_0 + tv$ неасимпт. напр., $F(r_0+tv)=0$ – кв. ур.

Опр. Если две точки пересечения прямой и ПВП сливаются в одну, т.е. уравнение имеет совп. корни, то прямая $r = r_0 + tv$ наз. **касательной** к ПВП.

Возьмем за r_0 эту общую точку.

Т.к. $F(r_0)=0$, то ур-е $F(r_0+tv) = \langle Av, v\rangle t^2 + 2\langle Ar_0+b, v\rangle t + F(r_0) = 0$

принимает вид $t(\langle Av, v\rangle t + 2\langle Ar_0 + b, v\rangle) = 0$.

Один его корень $t_1 = 0$, $t_2 = -\dfrac{2\langle Ar_0+b, v\rangle}{\langle Av, v\rangle} \Rightarrow \langle Ar_0 + b, v\rangle = 0$

это и есть условие, которому должен удовл. напр. вектор v прямой $r = r_0 + tv$.

Пусть $r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – произвольная точка любой из этих прямых

тогда вектор $r - r_0 = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$ есть напр. вектор этой прямой и

он удовл. условию $\langle Ar_0 + b, r - r_0\rangle = 0$.

Таким образом, все точки r, всех прямых, кас. ПВП в т. x_0 удовл. ур-ию $\langle Ar_0 + b, r - r_0\rangle = 0$.

Если $Ar_0 + b \neq 0$, т.е. точка r_0 не центр пов-ти, то это уравнение I степени задает плоскость, проход. ч/з r_0.

Эта пл-ть наз. **касат. пл-тью** к ПВП в т. x_0.

Пример: для эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1/a^2 & & \\ & 1/b^2 & \\ & & 1/c^2 \end{pmatrix}$, $b = 0$

$\left\langle \begin{pmatrix} x_0/a^2 \\ y_0/b^2 \\ z_0/c^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow \dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} + \dfrac{z_0 z}{c} +$

19 Диаметральные плоскости, сопр. направлению. Главные направления. Плоскости симметрии

Пусть v напр. вектор $r = r_0 + tv$ неасимпт-ий.

В этом случае $F(r_0 + tv) = 0$ – кв. ур-ие. t_1 и t_2 – корни.

Возьмем r_0 – середина отрезка $[r_1 = r_0 + t_1 v;\ r_2 = r_0 + t_2 v]$.

получим ур-ие, которому удовл. r_0: $t_1 + t_2 = 0$

потому что середина $(r_1 - r_0 = -(r_2 - r_0))$

(r_1 и r_2 – точки пересечения прямой с пов-тью)

Тогда по т. Виета $\langle Ar_0 + b, v\rangle = 0$