

Касательные плоскости к поверхности.

Рассм. ПВП $F(x) = x^T A x + 2b^T x + c = 0$

и прямую $x = x_0 + tV$ касант. канр., $F(x_0 + tV) = 0$ - кв. ур.

Опр. Если две точки пересечения прямой и ПВП следуются в одну, т.е. уравнение имеет совп. корни, то прямая $x = x_0 + tV$ наз. касательной к ПВП.

Возьмем за x_0 эту общую точку.

Н.к. $F(x_0) = 0$, то ур-ие $F(x_0 + tV) = \langle AV, V \rangle t^2 + 2 \langle Ax_0 + b, V \rangle t + F(x_0) = 0$ принимает вид $t(\langle AV, V \rangle t + 2 \langle Ax_0 + b, V \rangle) = 0$.

Одн из корней $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{2 \langle Ax_0 + b, V \rangle}{\langle AV, V \rangle} \Rightarrow \langle Ax_0 + b, V \rangle = 0$
это и есть условие, которому должны удовн. канр. вектор V прямой $x = x_0 + tV$.

Пусть $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ - произвольная точка прямой из этих трех тогда вектор $x - x_0 = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$ есть канр. вектор этой прямой и

он удовн. условию $\langle Ax_0 + b, x - x_0 \rangle = 0$.

Иными словами, все точки x , все канр. кас. ПВП в т. x_0 удовн. ур-ию $\langle Ax_0 + b, x - x_0 \rangle = 0$.

Если $Ax_0 + b \neq 0$, т.е. точка x_0 не центр пов-ти, то это уравнение 1 степени задает плоскость, проход. x/z x_0 . Эта пл-ть наз. касат. пл-тью к ПВП в т. x_0 .

Пример: для эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix}, \quad b = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_0/a^2 \\ y_0/b^2 \\ z_0/c^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1 = 0$$

Диаметральные плоскости, сопр. направлению. Главные направления. Плоскости симметрии

Пусть V канр. вектор $r = r_0 + tV$ касант-ий.

В этом случае $F(r_0 + tV) = 0$ - кв. ур-ие. t_1 и t_2 - корни. (потому что середина $(x_1 - x_0 = -(x_2 - x_0))$)

Возьмем x_0 - середина отрезка $[r_1 = r_0 + t_1 V; r_2 = r_0 + t_2 V]$.
получим ур-ие, которому удовн. x_0 : $t_1 + t_2 = 0$

Тогда по т. Виета $\langle Ax_0 + b, V \rangle = 0$

(r_1 и r_2 - точки пересечения прямой с пов-тью)

Итак, x_0 - координат середины малой хорды, касающейся
из п.в.-ти прямой $z = x_0 + i y$ удовл. ур-ию

$$\langle Ax + b, y \rangle = 0$$

это ур-ие определяет п.в.-ть, которая кас.

двумерной плоскостью п.в.-ти, сопр. канр. y .

Опр. Направления y_1 и y_2 наз. сопряженными, если
выполнено $\langle Ay_1, y_2 \rangle = 0$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$k(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1) + l(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2) + m(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + b_3) = 0$$

Свойства ДП: 1) Всякая ДП содержит все центры ПВП

Д.во: Точка x_0 явл. центром симметрии, если

она удовл. $Ax_0 + b = 0$.

Если, что если x_0 удовл., то она будет удовл. и
 $\langle Ax_0 + b, y \rangle = 0$.

Опр. Направление u - осовое, если u сопряжено u : $\langle Au, u \rangle = 0$.
Направление u - главное, если $\exists \lambda \neq 0 \quad Au = \lambda u$.

Опр. Пусть π - плоскость. Она наз. п.в.-тью симметрии ПВП, если

$\forall x \in \pi \quad \forall y \perp \pi$ выполнено $x_0 + y \in \text{ПВП} \Leftrightarrow x_0 - y \in \text{ПВП}$.

(П.в.-ть симметрии явл. главн. п.в.-тью точки)

20

Теория инвариантов и полуинвариантов для ПВП.
"Дерюжная карта"

1. Все собственные числа A явл. инвариантами.

Д.во: Сделаем замену $z = U z' + b$, $U^{-1} = U^T$,

$$|A'| = |U^{-1} A U| = |A|$$

$$\Rightarrow |A - \lambda E| = |A' - \lambda E|.$$

2. След матрицы, т.е. сумма элементов порядка 2,
определяет матрицу A - инв.-том (вытекает из 1)