

Итак, x_0 - координат середины малой хорды, касающейся
из п.в.-ти прямой $z = x_0 + i y$ удовн. ур-ие

$$\langle Ax + b, y \rangle = 0$$

Это ур-ие определяет п.в.-ть, которая кас.

двумерной плоскостью п.в.-ти, сопр. напр. y .

Опр. Направления y_1 и y_2 наз. сопряженными, если
выполнено $\langle Ay_1, y_2 \rangle = 0$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$k(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1) + l(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2) + m(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + b_3) = 0$$

Свойства ДП: 1) Всякая ДП содержит все центры ПВП

Д.во: Точка x_0 явл. центром симметрии, если

она удовн. $Ax_0 + b = 0$.

Если, что если x_0 удовн., то она будет удовн. и
 $\langle Ax_0 + b, y \rangle = 0$.

Опр. Направление u - осовое, если u сопряжено u : $\langle Au, u \rangle = 0$.
Направление u - главное, если $\exists \lambda \neq 0 \quad Au = \lambda u$.

Опр. Пусть π - плоскость. Она наз. п.в.-тью симметрии ПВП, если

$\forall x \in \pi \quad \forall y \perp \pi$ выполнено $x_0 + y \in \text{ПВП} \Leftrightarrow x_0 - y \in \text{ПВП}$.

(П.в.-ть симметрии явл. главн. п.в.-тью точки)

20

Теорема инвариантов и полуинвариантов для ПВП.
"Дерюгина карта"

1. Все собственные числа A явл. инвариантами.

Д.во: Сделаем замену $z = U z' + b$, $U^{-1} = U^T$,

$$|A'| = |U^{-1} A U| = |A|$$

$$\Rightarrow |A - \lambda E| = |A' - \lambda E|.$$

2. След матрицы, т.е. сумма элементов порядка 2,
определяет матрицу A - инв.-том (вытекает из 1)

$$\star |A - \lambda E| = -\lambda^3 + \text{tr} A \lambda^2 - \left(|a_{11} a_{12}| + |a_{11} a_{13}| + |a_{22} a_{23}| \right) \lambda + |A|$$

$$I_1 = \text{tr} A$$

$$I_2 = |a_{11} a_{12}| + |a_{12} a_{22}| + |a_{13} a_{33}|$$

$$I_3 = |A|$$

$$I_4 = |\bar{A}|$$

3. Будем, что этих попул. не хватает. Тогда популяции попул.-ии.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & & & b_1 \\ & a_{22} - \lambda & & b_2 \\ & & a_{33} - \lambda & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix} = -c\lambda^3 + K_1\lambda^2 - K_2\lambda + K_3$$

$$K_1 = |a_{11} b_1| + |a_{22} b_2| + |a_{33} b_3|$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{13} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_3 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}$$

$$K_3 = |\bar{A}| \text{ (инв.)}$$

Дли изм. попул.ариситации, потому что выдерживают только преобр.-ие без II периода: $z = U z'$

Лемма. K_1, K_2, K_3 сохр. при ортог. замене коорд. с сохр. изм.а.

Р-во: $\varphi(z) = F(z) - \lambda \underbrace{\langle r, r \rangle}_{\text{вект. } \lambda \text{ по квадратам}}, z = U z'$

$$\lambda \langle U z', U z' \rangle = \lambda z'^T U^T U z' = \lambda z'^T z' = \lambda \langle z', z' \rangle$$

$$\Rightarrow \varphi(z') = F(z') - \lambda \langle z', z' \rangle.$$

$$|\bar{A}| \text{ инвариант, но есть } F(z') = F(z), \text{ и}$$

$$\lambda \langle z, z \rangle \text{ и } \lambda \langle z', z' \rangle \text{ - вект.-ие } \lambda \text{ по квадр.-м.}$$

$$\text{и-о. } K_1, K_2, K_3 \text{ сохр.}$$

Лемма Лаврентова. • Если $F(z)$ в нек. г.с.к. и содержит одну из переменных, то K_2 - инв.

• Если нет 2х переи., то K_2, K_1 инв.

Р-во: 1) Пусть нет z' .

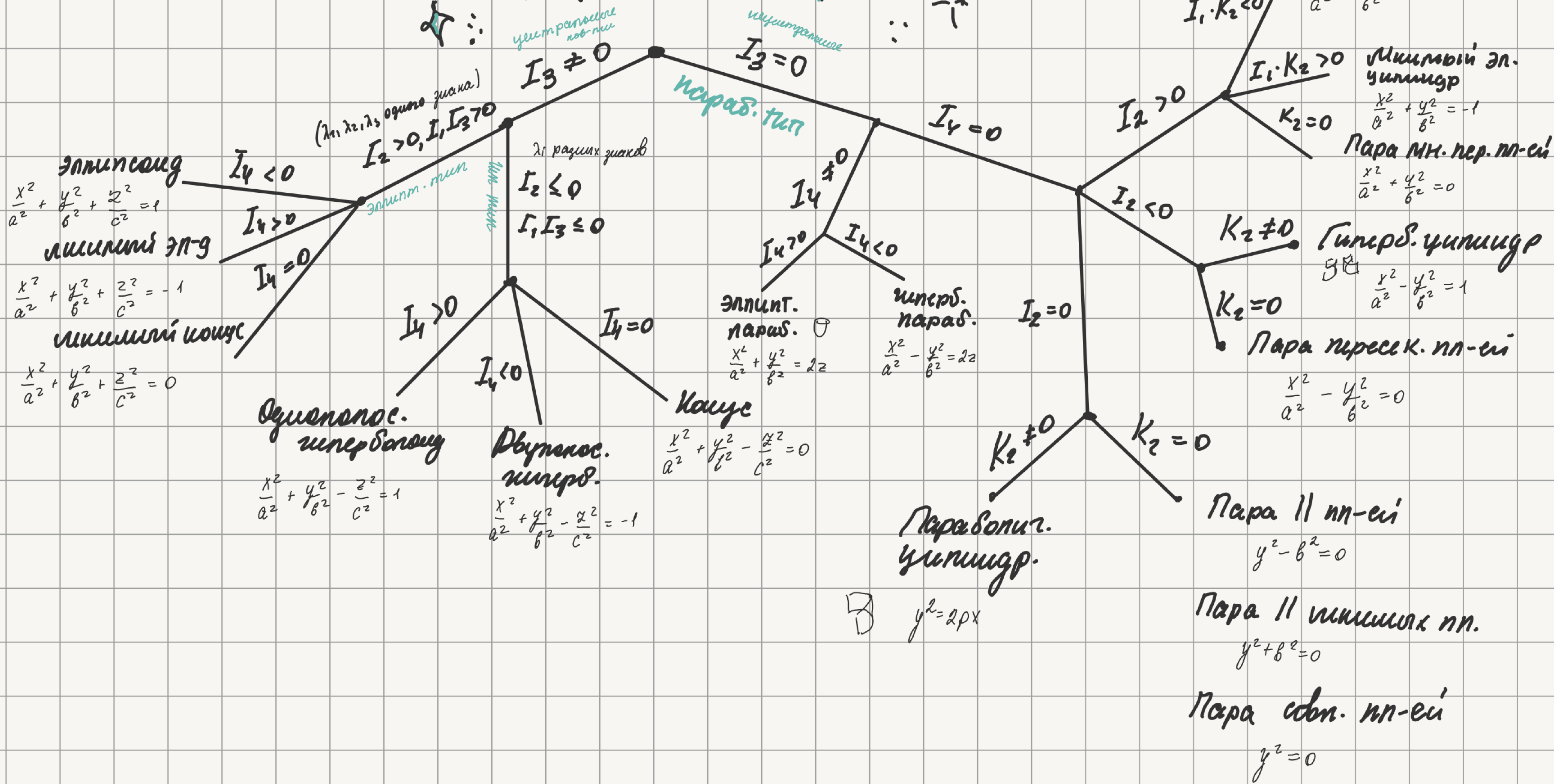
Матрица $\bar{A}$: $\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b'_1 & b'_2 & 0 & c \end{vmatrix}$. $K'_2 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & b'_2 \\ b'_1 & b'_2 & c \end{vmatrix}$ сохр.

2) Пусть имеем y', z' . Тогда:

$$F(z) = a_{11}x'^2 + 2b_1x' + c'$$

Это K_1 .

Дорожная карта



21

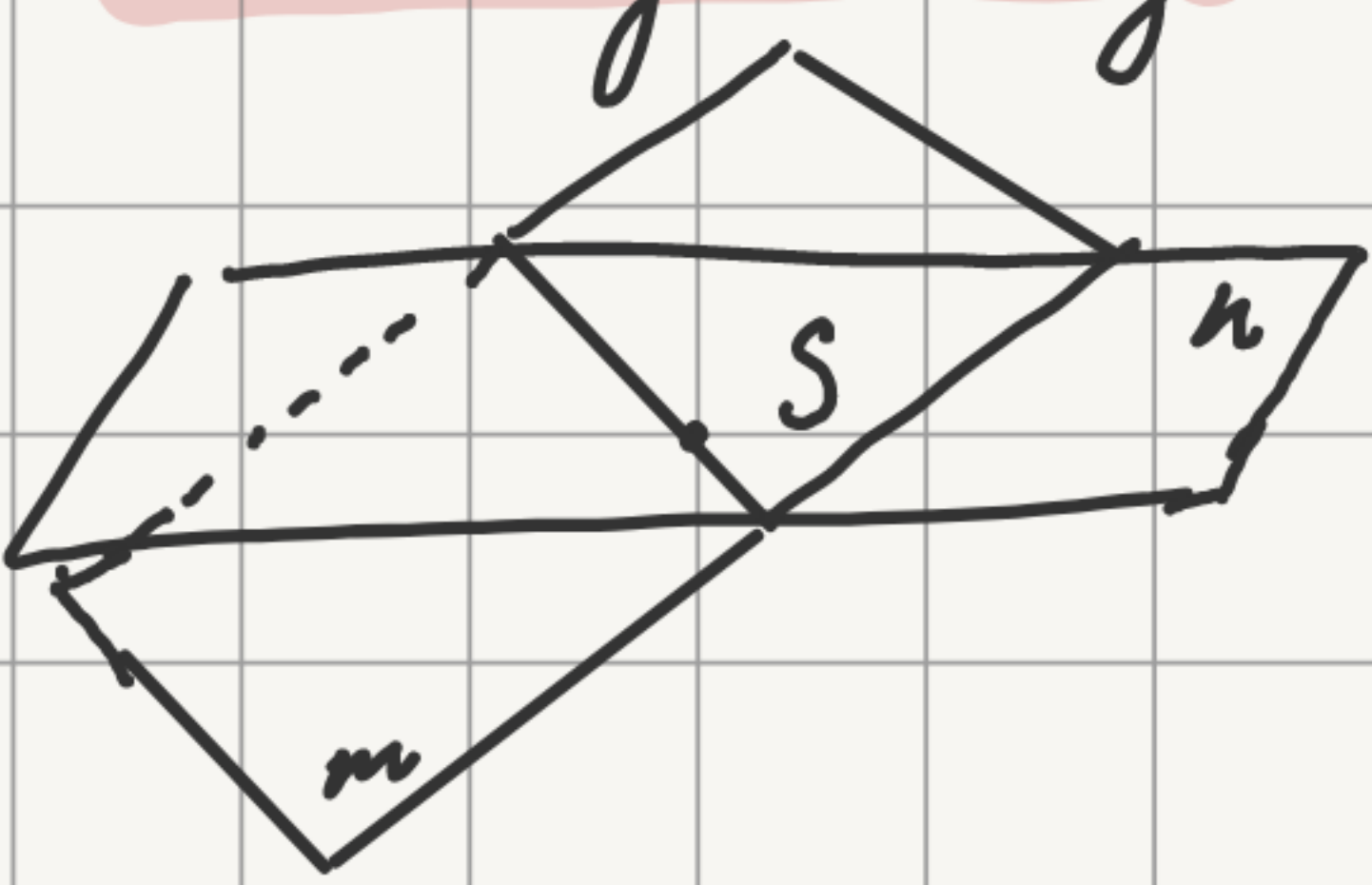
Проективная геометрия

Есть две модели проективной плоскости.

I. Модель-связка

Рассм. связка всех прямых и плоскостей в $\mathbb{R}^3$, проходящих т.з. т. S.

- Точки в проект. пл-ти — прямые связки
- Прямые в пр. пл-ти — плоскости связки
- Все точки и прямые в пр. пл-ти равноправны



II. Аффинно-проективная модель (топологическая афф. пл-ть)

$$\alpha \in \mathbb{R}^3, S \notin \alpha$$

прямые связки из α' и соотв. имевшие точки π . Назовем прямые α' беск. уг. точками α' -беск. уг. прямые.

