$\rho_1 = a + \varepsilon x$ (из д-ва)

$\rho_2 = a - \varepsilon x$

$\cos\varphi' = \dfrac{x+c}{a+\varepsilon x}$

$(a+\varepsilon x)\cos\varphi' = x + c$

$\varepsilon \rho \cos\varphi' = \varepsilon x + \varepsilon c$

$\varepsilon \rho \cos\varphi' = \rho - a + \varepsilon c$

$\rho = \dfrac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon\cos\varphi'} = \dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi'}$ $\qquad a - \varepsilon c = a - c\dfrac{c}{a} = \dfrac{a^2-c^2}{a} = \dfrac{b^2}{a} = p.$

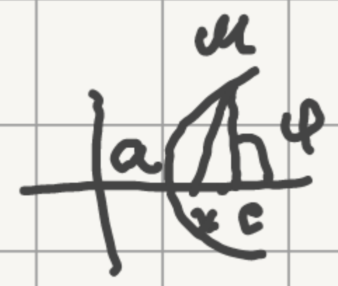
$\cos\varphi = \dfrac{x - p/2}{\rho}$

$\rho\cos\varphi = x - p/2$

$\rho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$

$\rho_1 = \varepsilon x + a$

$\rho_2 = \varepsilon x - a$



$\cos\varphi = \dfrac{c-x}{\rho}$ $\qquad c^2 = a^2 + b^2$

$\varepsilon\cos\varphi\,\rho = \varepsilon c - \varepsilon x$

$\varepsilon\cos\varphi\,\rho = \varepsilon c - a - \rho$

$\varepsilon\cos\varphi\,\rho = p - \rho$

$\rho = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$

тут стоп-идем

4) Уравнение касательных к эллипсу, гиперболе, параболе. Асимптоты гиперболы.

① Касательная к параболе — это прямая, непарал-ая оси параболы, имеющая с параболой 1 общую точку.

(x_0, y_0) — т. касания $y^2 = 2px$ и прямой $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$, $m \neq 0$

Имеем: $(y_0+mt)^2 = 2p(x_0+lt) \Leftrightarrow y_0^2 + 2my_0t + m^2t^2 = 2px_0 + 2plt \Leftrightarrow$

$m^2t^2 + 2t(my_0 - pl) = 0$ — один корень при $my_0 - pl = 0 \Leftrightarrow l = m\dfrac{y_0}{p}$

Канон. ур-ие касат. к параболе имеет вид

$\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} \Leftrightarrow y_0(y-y_0) = p(x-x_0)$

$\Updownarrow$

$yy_0 = p(x+x_0)$

Касательные к эллипсу и гиперболе:

1) (x_0, y_0) т.кас. эл. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и прямой $l: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$

Имеем $\dfrac{(x_0+lt)^2}{a^2} + \dfrac{(y_0+mt)^2}{b^2} = 1$

$\underbrace{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}}_{=1} + 2t\left(\dfrac{lx_0}{a^2} + \dfrac{my_0}{b^2}\right) + t^2\left(\dfrac{l^2}{a^2} + \dfrac{m^2}{b^2}\right) = 1$ — один корень (надо)

$\Downarrow$

$\dfrac{x_0 l}{a^2} + \dfrac{y_0 m}{b^2} = 0$

можно положить $l = \dfrac{y_0}{b^2}$, $m = \dfrac{-x_0}{a^2}$

Канон. ур-ие: $\dfrac{x-x_0}{y_0/b^2} = \dfrac{y-y_0}{-x_0/a^2} \Leftrightarrow \dfrac{x_0}{a^2}(x-x_0) + \dfrac{y_0}{b^2}(y-y_0) = 0$

$\Updownarrow$

$\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

Аналогично ур-ие касат. к гиперболе $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$

② Асимптоты гиперболы

У гиперболы есть две асимптоты - прямые, к которым приближ. гипербола при $x \to \pm\infty$

Перепишем ур-ие $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ след. образом:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1; \quad y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right); \quad y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

Рассмотрим $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$:

проделаем след. преобразование: $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} =$

$$= \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2} - x + x\right) = \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2} - x\right) = \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}\frac{(\sqrt{x^2-a^2} - x)(\sqrt{x^2-a^2} + x)}{(\sqrt{x^2-a^2} + x)} =$$

$$= \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}\frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2-a^2} + x} = \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2} + x} = \frac{b}{a}x - \frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2} + x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$\underset{+\infty}{\to}$ гипербола стремится к $y = \frac{b}{a}x$.

Аналогично для $2^{го}$ случая получаем $y = -\frac{b}{a}x$.

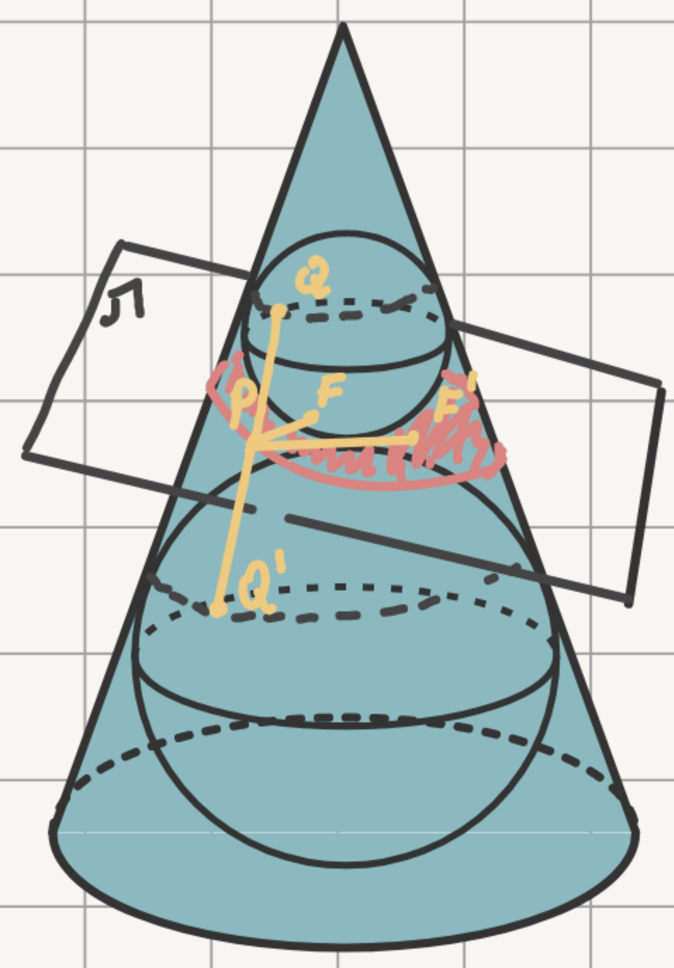
до сюда

5) Кривые второго порядка как конические сечения. Шары Данделена.

Th. Пересечение кругового конуса K с плоскостью, не проходящей ч/з точку O, явл. либо параболой, либо гиперболой, либо эллипсом

▷ 1) П-ть || прямолин. обр-ей — парабола
2) П-ть пересек. только с одной половинкой конуса — эллипс
3) П-ть пересек. обе половины конуса — гипербола

Метод: исп. сфер Данделена



Случай 2: Исп. фок. св-ва эллипса
Одна сфера, впис. в конус касается пл-ти сверху (F), другая, впис. касается пл-ти сечения снизу (F')