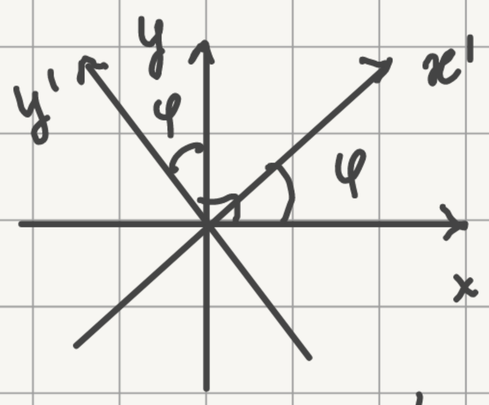
Опр. Канонич. с.к. для к.в.п. назовем такую с.к., в которой уравнение К имеет наиболее простой вид (отсутствие a_{12} и по возм-ти отсутствие b_1, b_2), такой вид назовем каноническим уравнением.

Алгоритм. (Нахожд. угла поворота).



Пусть $a_{12} \neq 0$, делаем поворот на φ.

$$\begin{cases} x = \cos\varphi\, x' - \sin\varphi\, y' \\ y = \sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y' \end{cases}$$

$$F(x,y) = a_{11}(\cos\varphi x' - \sin\varphi \cdot y')^2 + 2a_{12}(\cos\varphi x' - \sin\varphi y')(\sin\varphi x' + \cos\varphi y') +$$
$$+ a_{22}(\sin\varphi x' + \cos\varphi y')^2 + 2b_1(\cos\varphi x' - \sin\varphi y') + 2b_2(\sin\varphi x' + \cos\varphi y') + c =$$

$$= a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c' = F'(x',y')$$

$$2a'_{12} = a_{11}(-2\sin\varphi\cdot\cos\varphi) + 2a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2a_{22}\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$
$$a'_{12} = -a_{11}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

$$(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)a_{12} + \sin\varphi\cos\varphi\,(a_{22} - a_{11}) = 0$$

$a_{12} \neq 0 \Rightarrow \cos\varphi \neq 0$

$$(1 - tg^2\varphi)a_{12} + tg\varphi\,(a_{22} - a_{11}) = 0$$

Находим φ:

$$D = (a_{22} - a_{11})^2 - 4(-a_{12})\cdot a_{12} = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 > 0$$

(как сумма)

$$tg\varphi = \frac{a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}}}{-2a_{12}}$$

или

$$\cos 2\varphi\, a_{12} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,(a_{22} - a_{11}) = 0$$

$$ctg\,2\varphi\, a_{12} + \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11}) = 0$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\,arcctg\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}\right) + \frac{\pi k}{2}$$

Алгоритм. Метод собственных векторов

Найдем с.з. и в-ры матр. A: λ_1, λ_2; v_1, v_2

тогда перейдем в ОНБ собст. в-ов.

Матрица A принимает вид $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \Rightarrow a_{12}=0$

▷ Из с.в. можно выбрать ОНБ $\{e_1, e_2\}$

$Ae_i = \lambda_i e_i$

Перейдем в новую с-к. $x = Qx'$. Столбцы Q - коор-ты в-в e_i.

Тогда $\tilde{A} = Q^T A Q$ - диаг.: на i,j месте стоит скал. пр-ие i-ой стр. Q^T на j столбец AQ, т.е. $\langle e_i, \lambda_i e_j\rangle$

λ_i (при $i=j$), 0 (при $i\neq j$) ◁

Избавление от b_1, b_2 с помощью парал. переноса.

1) Если $\lambda_1 \neq 0$, то

$$\lambda_1 x'^2 + 2a_1' x' = \lambda_1\left(x'^2 + 2x'\frac{a_1'}{\lambda_1}\right) = \lambda_1\left(x'^2 + 2x'\frac{a_1'}{\lambda_1} + \frac{a_1'^2}{\lambda_1^2} - \frac{a_1'^2}{\lambda_1^2}\right) =$$

$$= \lambda_1\left(x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 - \frac{a_1'^2}{\lambda_1} = \lambda_1\tilde{x}^2 - \frac{a_1'^2}{\lambda_1}$$

$$\tilde{x} = x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}$$

2) Если $\lambda_2 = 0$, то

$$\lambda_2 y'^2 + 2a_2' y' = \lambda_2\left(y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}\right)^2 - \frac{a_2'^2}{\lambda_2} = \lambda_2\tilde{y}^2 - \frac{a_2'^2}{\lambda_2}.$$

$$\tilde{y} = y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}$$

7 Классификация к.в.п.

Канон. ур-ие, осн. инв. св-ва

I. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$

Приводим ур-ие к виду

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + c = 0$$

① $c \neq 0$, $\lambda_1\cdot\lambda_2 > 0$, $c\cdot\lambda_i < 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс

② $c \neq 0$ $\lambda_1\cdot\lambda_2 < 0$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гипербола

II. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$

Приводим к

$$2a_1'\tilde{x} + \lambda_2\tilde{y}^2 + c = 0$$

⑥ $a_1' \neq 0$ $2a_1'\left(\tilde{x} + \frac{c}{2a_1'}\right) + \lambda_2\tilde{y}^2 = 0$

$y^2 = 2px$ парабола

⑦ $a_1' = 0$, $\lambda_2\cdot c < 0$

$y^2 = b^2$ Пара парал. прямых