

$$\textcircled{3} \quad c \neq 0, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0, \quad c \cdot \lambda_1 > 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{мнимый эллипс}$$

$$\textcircled{2} \quad a'_1 = 0, \quad \lambda_2 \cdot c > 0$$

$$y^2 + b^2 = 0$$

Пара мнимых
// прямых

$$\textcircled{4} \quad c = 0, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{пара пересек. прямых}$$

$$\textcircled{9} \quad a'_1 = 0, \quad c = 0$$

$$y^2 = 0$$

пара совп.
прямых

$$\textcircled{5} \quad c = 0, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$

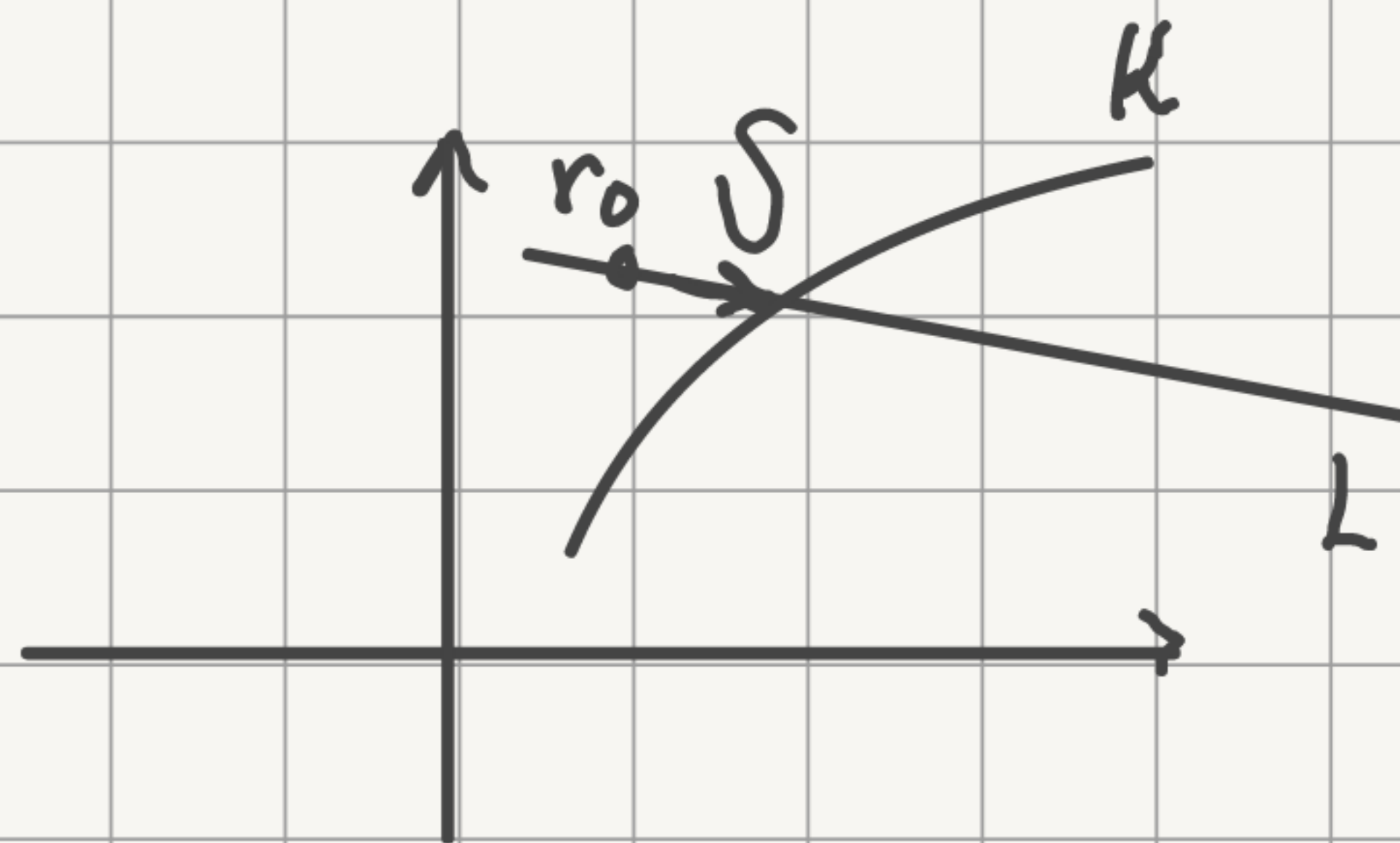
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{Точка}$$

8

Упрощенная формула $F(r_0 + t\nu) = \dots$

Точки пересечения прямой и к. д. н., асимпт. направл.

Опр. K - к. д. н., L - прямая
 $r_0 \in L$, ν - направляющий



$L: r_0 + t\nu$, где t - параметр

Пусть $F(r) = 0$ - ур. K , найдем пересечение прямой L и кривой K :

$$F(r_0 + t\nu) = 0$$

$$F(r_0 + t\nu) = (r_0 + t\nu)^T A (r_0 + t\nu) + 2b^T (r_0 + t\nu) + c =$$

$$= (r_0^T + t\nu^T) A (r_0 + t\nu) + 2b^T (r_0 + t\nu) + c =$$

$$= \nu^T A \nu t^2 + \underbrace{(r_0^T A \nu + \nu^T A r_0 + 2b^T \nu)}_{\text{числа}} t + \underbrace{r_0^T A r_0 + 2b^T r_0 + c}_{F(r_0)} =$$

$$= (\nu^T A \nu) t^2 + 2(r_0^T A \nu + b^T \nu) t + F(r_0) =$$

представим в виде скал. пр-ие

$$= \langle A\nu, \nu \rangle t^2 + 2\langle Ar_0 + b, \nu \rangle t + F(r_0) = 0$$

Уравнение выше наз. "упрощенная формула".

Замечание: рассмотрим формулу

$$\langle A\nu, \nu \rangle t^2 + 2\langle Ar_0 + b, \nu \rangle t + F(r_0) = 0$$

- 1) Если $\langle A, v \rangle \neq 0$, то это кв. ур-ие, имеет 0-2 корня.
- 2) Если $\langle A, v \rangle = 0$ и $\langle Aa + b, v \rangle \neq 0$, то это ур. лнн., 1 корень
- 3) Если $\langle A, v \rangle = 0$ и $\langle Aa + b, v \rangle = 0$, то ур-ие может и имеет решения, или L может лежать в F.

Мы рассмотрим возможные пересечения к.д.п. и прямой.

Опр. Направление, заданное вектором $v \neq 0$ наз. асимптотическим, если $\langle A, v \rangle = 0$

Замечание: асимпт. направления разных прямых:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}; \quad Av = \begin{pmatrix} a_{11}v_x + a_{12}v_y \\ a_{12}v_x + a_{22}v_y \end{pmatrix}$$

$$\langle Av, v \rangle = a_{11}v_x^2 + 2a_{12}v_xv_y + a_{22}v_y^2 = 0$$

Можно считать $v \neq 0 \Rightarrow v_x \neq 0, v_y^2 \neq 0$

$$a_{11} + 2a_{12}\frac{v_y}{v_x} + a_{22}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)^2 = 0$$

$$D/4 = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = -|A|$$

$$\textcircled{1} |A| < 0 \Rightarrow D > 0$$

2 асимпт. направл.

Проведем орт. преобр.

$$U^T = U^{-1} \Rightarrow |A'| = |U^T A U| = |U^{-T} A U| = |A|$$

тогда A' будет иметь так

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A'| = \lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0,$$

$\lambda_1 > \lambda_2$ - разн. знаков $\Rightarrow$ гипербола или 2 прямые

Пусть $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ - асимпт., тогда $v^T A v = 0$

$$\begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{v_x^2}{a^2} - \frac{v_y^2}{b^2} = 0$$

$$S_y = \pm \frac{b}{a} S_x$$

$(S_x; \pm \frac{b}{a} S_x)$ - асимпт. направления где пересек. и пересек. прямых

2) $|A| > 0 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$ нет ас. напр.

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$

эллипс, точка, невыпуклый эллипс

3) $|A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0 \Rightarrow D = 0$

одно ас. напр.

Гипербола, парал. прямые.

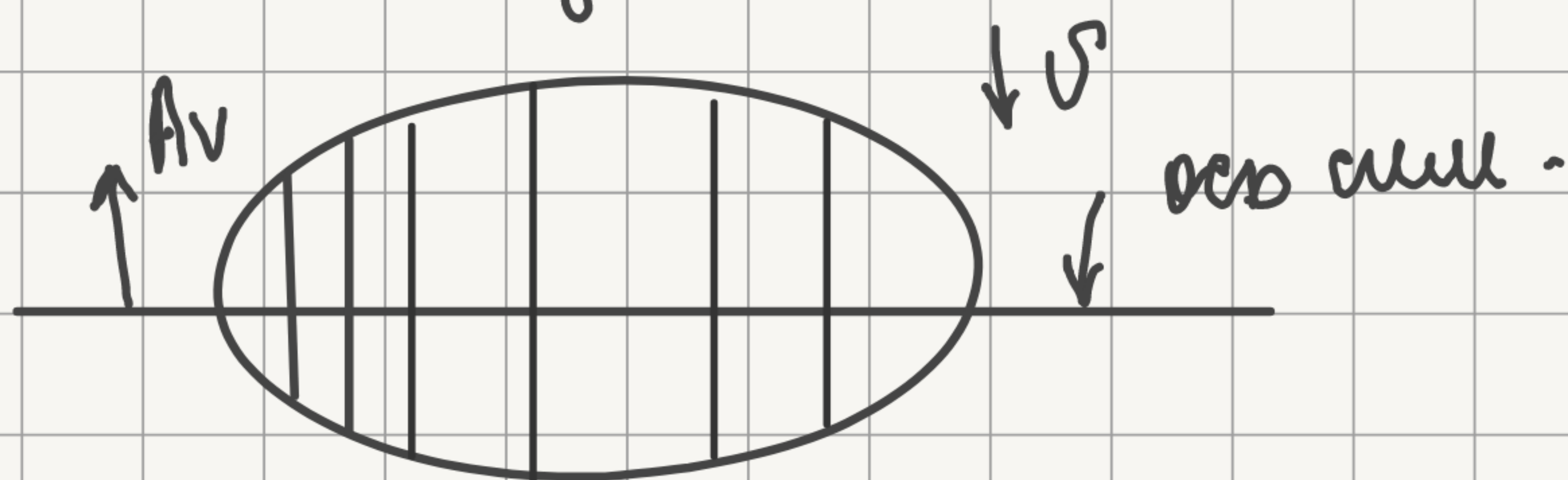
9 Главные направления, оси симметрии, центр симметрии.

Опр. Если $V \neq 0$, что $AV \neq 0$, то V - не особое напр.

Если $AV = 0$, то V - особое напр.

(V - особое, если V - собственный A где $\lambda = 0$.)

Опр. Главной осью симм. к.в.п. наз. её диаметр, перп. к сопр. к или хордам.
Этот диаметр явл. осью симметрии кривой



Опр. О-центр симметрии, если $\forall P \in K, P'$ - симм. отн. О, $P' \in K$ ($\vec{OP} = -\vec{OP'}$)

Утв. О с коорд. $(x_0; y_0)$ - центр симметрии, когда $Av + b = 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2 = 0 \end{cases}$$

▷ Сдвинем начало координат в точку (x_0, y_0) , так, чтобы в $F(x, y)$ исчезли лнк. члены.

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + x_0 \\ y = \tilde{y} + y_0 \end{cases}$$