$$\delta_y = \pm \frac{b}{a} \delta_x$$

$(\delta_x; \pm \frac{b}{a}\delta_x)$ – асимпт. направление для гиперболы и пересек. прямых

2) $|A| > 0 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$ нет ас. напр.
$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

эллипс, точка, мнимый эллипс

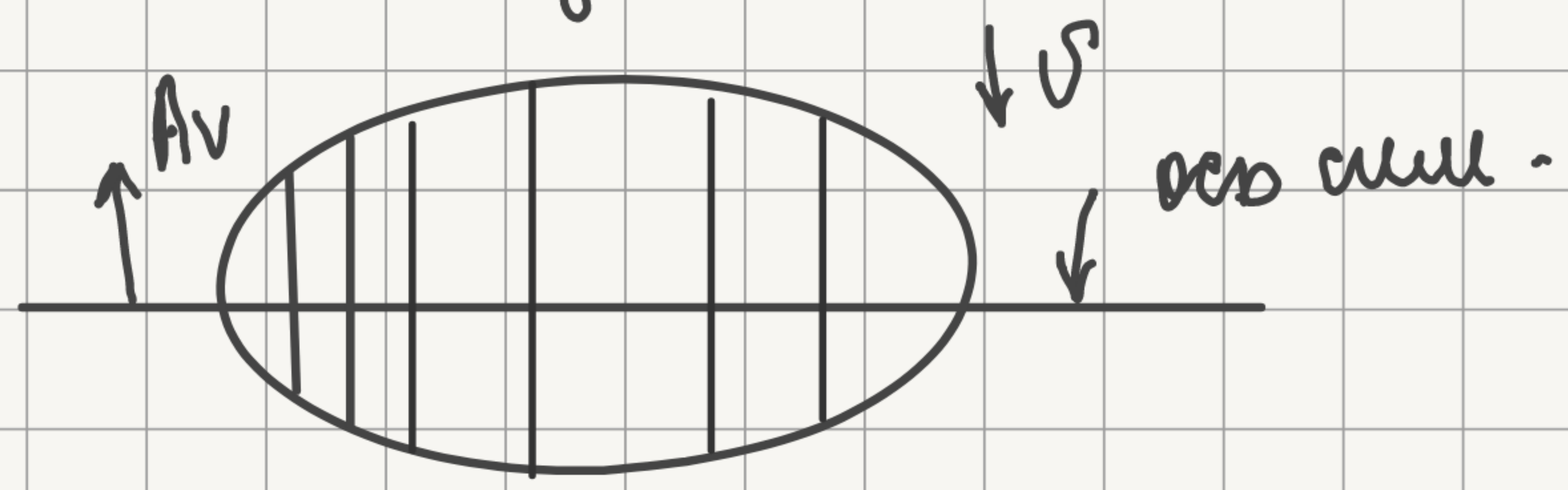
3) $|A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0 \Rightarrow D = 0$
одно ас. напр.

Парабола, парал. прямые.

9 Главные направления, оси симметрии, центр симметрии.

Опр. Если v – таков, что $Av \neq 0$, то v – не особое напр.
Если $Av = 0$, то v – особое напр.
(v – особое, если v – собственный A для $\lambda = 0$)

Опр. Главной осью симм. к.в.п. наз. её диаметр, перп. к сопр. к ним хордам.
Этот диаметр явл. осью симметрии кривой



Опр. O – центр симметрии, если $\forall P \in K$, P' – симм. отн. O, $P' \in K$ ($\vec{OP} = -\vec{OP'}$)

Утв. O с коорд. $r_0 = (x_0; y_0)$ – центр симметрии, когда $Ar_0 + b = 0$: $\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2 = 0 \end{cases}$

$\triangleright$ Сдвинем начало координат в точку (x_0, y_0), так, чтобы в $F(x, y)$ исчезли лин. слаг.
$$\begin{cases} x = \tilde{x} + y_0 \\ y = \tilde{y} + y_0 \end{cases}$$

$$F(x,y) = \left((\tilde{x}\ \tilde{y}) + (x_0\ y_0)\right) A \left(\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right) + 2b^T\left(\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right) + c =$$

$$= (\tilde{x}\ \tilde{y}) A \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} + (\tilde{x}\ \tilde{y}) A \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + (x_0\ y_0) A \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} + 2b^T \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} + \underbrace{(x_0\ y_0) A \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + 2b^T \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + c}_{F(x_0,y_0)} =$$

$$= (\tilde{x}\ \tilde{y}) A \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} + 2\left((x_0\ y_0) A + b^T\right) \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} + F(x_0,y_0) =$$

$$= (\tilde{x}\ \tilde{y}) A \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} + 2\left(A \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + b\right)^T \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} + F(x_0,y_0) = \tilde{F}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0.$$

Если $A\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + b = 0$, то пропадают члены с первой степенью,
$\tilde{F}(\tilde{x},\tilde{y}) = (\tilde{x}\ \tilde{y}) A \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} + F(x_0,y_0) = 0$

Заметим, что $\tilde{F}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0 \iff \tilde{F}(-\tilde{x},-\tilde{y}) = 0$. ◁

- Кривая центральная $\iff \det A \neq 0$.
  нет центра симметрии у параболы ($\det A = 0$) и
  у пары совп. и паралл. прямых беск. много реш. $\Rightarrow$ не центр. кривая.

10 Хорды кривой второго порядка. Диаметр, сопряж. направлению. Сопряженные диаметры, пример эллипса.

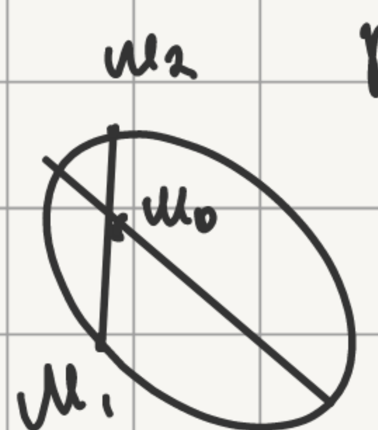
неасимпт. направление

Опр. Середины семейства параллельных хорд с направ. v: $\langle Av, v\rangle \neq 0$ лежат на одной прямой, которая наз. диаметром.

$\Downarrow$

$F(r) = r^T A r + 2b^T r + c = 0$
имеется прямая L: $r_0 + tv$, проход. ч/з точку (x_0,y_0) в напр. вектора $\begin{pmatrix}l\\ m\end{pmatrix}$
Общие точки K и прямой опред из ур-ия $F(r_0 + tv)$:
$\langle Av, v\rangle t^2 + 2\langle Ar_0 + b, v\rangle t + F(r_0) = 0$

Рассм. семейство $\parallel$ прямых неасимпт. напр. $u = \begin{pmatrix}l\\ m\end{pmatrix}$



Пусть нк. прямая этого семейства пересек K в точках M_1 и M_2, и пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ — середина $[M_1, M_2]$.
Тогда M_1M_2: $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}$. Пусть t_1 и t_2 — знач. пар-ра t, отвеч. точкам M_1 и M_2:

$\begin{cases} x_1 = x_0 + t_1 l \\ y_1 = y_0 + t_1 m \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = x_0 + t_2 l \\ y_2 = y_0 + t_2 m \end{cases}$

$\begin{pmatrix}x_1 - x_0\\ y_1 - y_0\end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix}l\\ m\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_2 - x_0\\ y_2 - y_0\end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix}l\\ m\end{pmatrix}$, т.е. $\overrightarrow{M_0M_1} = t_1 u$, $\overrightarrow{M_0M_2} = t_2 u$

Т.к. $\overrightarrow{M_0M_1} = -\overrightarrow{M_0M_2}$, то $t_1 + t_2 = 0$