$$\det(P\cdot Q)=\prod_{1\le r\le l} f(\beta_r)\cdot\prod_{1\le r<s\le l}(\beta_r-\beta_s)\cdot\prod_{1\le i\le k} g(\alpha_i)\cdot\prod_{1\le i<j\le k}(\alpha_i-\alpha_j)=$$

$$=\prod_{1\le i<j\le k}(\alpha_i-\alpha_j)\cdot\prod_{1\le r<s\le l}(\beta_r-\beta_s)\cdot a_0^l\prod_{\substack{1\le r\le l\\1\le i\le k}}(\beta_r-\alpha_i)\cdot b_0^k\prod_{\substack{1\le i\le k\\1\le r\le l}}(\alpha_i-\beta_r).$$

Учитывая, что

$$\det P\cdot\det Q=\det(P\cdot Q),$$

после сокращения, получим

$$\det P=a_0^l\,b_0^k\prod_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le l}}(\alpha_i-\beta_j).$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{Res}(f,g)=a_0^l\prod_{i=1}^{k}g(\alpha_i).$$

У п р а ж н е н и я. 1) Где нужно, чтобы a_0 и b_0 были отличны от нуля? 2) Почему выполненное сокращение законно?

25.2. Критерий совместности двух уравнений с одним неизвестным. Теперь мы готовы дать ответ на вопрос, сформулированный в начале параграфа.

Т е о р е м а 2. *Для многочленов $f,g\in P[x]$ равносильны следующие утверждения*:

1) $\mathrm{Res}(f,g)=0$;

2) f *и* g *имеют общий корень или* $a_0=b_0=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о разбивается на несколько случаев.

Случай 1. $a_0\ne0$, $b_0\ne0$. Сразу следует из теоремы 1.

Случай 2. $a_0=b_0=0$. Тогда целый столбик в определителе $\mathrm{Res}(f,g)$ равен нулю, а потому $\mathrm{Res}(f,g)=0$.

Случай 3. $a_0\ne0$, $b_0=0$. Если $g(x)\equiv0$, то $\mathrm{Res}(f,g)=0$, f и g имеют общий корень. Пусть $g(x)\not\equiv0$, но $b_0=\ldots=b_{i-1}=0$, $b_i\ne0$.

Тогда

$$\operatorname{Res}(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{k-1} & a_k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_k \\ 0 & \dots & 0 & b_i & \dots & b_l & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_i & \dots & b_l \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_i & \dots & b_l \end{vmatrix} = a_0^i \operatorname{Res}(f,\overline{g}),$$

где $\overline{g}(x) = b_i x^{l-i} + \ldots + b_l$. Тогда

$$\operatorname{Res}(f,g) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Res}(f,\overline{g}) = 0.$$

По теореме 1 равенство $\operatorname{Res}(f,\overline{g}) = 0$ равносильно тому, что f и $\overline{g}$ имеют общий корень, а это равносильно тому, что f и g имеют общий корень.

Случай 4. $a_0 = 0$, $b_0 \neq 0$. Разбирается аналогично случаю 3. Теорема доказана.

25.3. Исключение неизвестных. Рассмотрим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

где $f_i \in P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Для ее решения можно попробовать применить метод исключения неизвестных, используемый для решения систем линейных уравнений, т. е. исключить вначале одну неизвестную, получив систему от меньшего числа неизвестных, затем вторую и т. д. Проделаем это для случая системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Пусть мы имеем систему двух уравнений от двух неизвестных:

$$\begin{cases} f(x,y) = a_0(y)x^k + a_1(y)x^{k-1} + \ldots + a_k(y) = 0, \\ g(x,y) = b_0(y)x^l + b_1(y)x^{l-1} + \ldots + b_l(y) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_i(y), b_j(y) \in P[y]$. Допустим, что мы умеем решать уравнения с одним неизвестным произвольной степени. Надо свести нашу систему