Глава 6

Интегрирование

6.1 Неопределённый интеграл

6.1.1 Первообразная

Дифференцируемая функция $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ называется *первообразной* функции $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x)$ при $x \in (a,b)$. Здесь и далее (a,b) — произвольный интервал вещественной прямой $\mathbb{R}$ который может быть неограниченным или даже совпадать с $\mathbb{R}$.

Очевидно, что первообразная определена неоднозначно. Если F — первообразная функции f, то $F + C$ тоже является первообразной этой функции для любой константы C.

Теорема 6.1.1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные функции $f(x)$ на интервале (a,b), то существует постоянная C, такая что $F_1(x) = F_2(x) + C$ для всех $x \in (a,b)$.*

Доказательство. Поскольку $F_1' = f$ и $F_2' = f$ на (a,b), на этом интервале $(F_1 - F_2)' = 0$. Следовательно существует такая постоянная C, что $F_1 - F_2 = C$ на (a,b). □

Нахождение первообразной некоторой функции f является операцией, обратной дифференцированию. Эта операция называется неопределённым интегрированием, а её результат — *непределённым интегралом* от функции f, который обозначается через $\int f(x)\,dx$. При этом f называется *подынтегральной функцией*. Таким образом, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a,b)$, то $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ при $x \in (a,b)$, где C — произвольная постоянная. Иногда мы будем говорить, что у функции существует неопределённый интеграл, подразумевая, что у неё существует первообразная.

Замечание 6.1.2. Фактически мы используем термины «неопределенный интеграл» и «первообразная», как синонимы. Так оно на самом деле и есть. Во многих учебниках неопределённый интеграл от функции определяется, как совокупность (то есть множество) её первообразных, отличающихся на аддитивную постоянную. Такой подход не несет в себе большого смысла и служит лишь некоторым оправданием введения понятия неопределённого интеграла. Мы не будем этого делать. Примем лишь одно соглашение, призванное упростить (или сделать слегка короче) встречающиеся формулы. Соглашение связано с произвольной постоянной C. Поскольку и так понятно, что она должна быть прибавлена к первообразной, мы будем в дальнейшем писать её только в последнем выражении. Если же в некотором выражении встречается неопределенный интеграл, то постоянную в нем писать не будем. Таким образом, выражение $\int f(x)\,dx$ уже включает в себя произвольную постоянную. •

Мы не зря постоянно отмечаем, что функция f определена на интервале. Если бы f была определена на объединении непересекающихся интервалов (a_1, b_1) и (a_2, b_2), то её первообразные F и G отличались бы на константу на каждом из этих интервалов, но, вообще говоря, не существовало бы константы C, такой что $F(x) - G(x) = C$ для всех $x \in (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2)$. По этой причине мы будем всегда предполагать, что функция f, у которой мы ищем первообразную или неопределённый интеграл, определена на интервале.

Пример 6.1.3. Пусть $f(x) = \cos x$ при $x \in (a, b)$. Тогда

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \quad \text{при} \quad x \in (a, b).$$ •

Мы всегда будем обозначать произвольную постоянную в неопределённом интеграле через C. Заметим, что эта постоянная будет появляться только в выражении для первообразной, то есть после вычисления неопределённого интеграла. В самом неопределённом интеграле мы эту постоянную писать не будем.

Дифференцируемость первообразной является довольно ограничительным условием. Рассмотрим пример.

Пример 6.1.4. Пусть $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на интервале $(-1, 1)$, то есть

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Первообразными данной функции на интервалах $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ являются функции $-x+C_1$ и $x + C_2$ соответственно. «Склеивая» эти функции по непрерывности в точке $x = 0$, мы получим функцию $F(x) = |x| + C$. Мы произвели склейку, поскольку первообразная должна быть дифференцируемой, а значит, непрерывной функцией на $(-1, 1)$. Нетрудно видеть, что $F'(x) = f(x)$ во всех точках интервала $(-1, 1)$ за исключением точки $x = 0$. В этой точке функция F не дифференцируема. Таким образом, функция $\operatorname{sgn} x$ не имеет первообразной на интервале $(-1, 1)$. •

Этот пример показывает, что имеет смысл расширить понятие первообразной (то есть неопределённого интеграла).

Определение 6.1.5. Непрерывная функция $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется *первообразной* функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, если существует конечное подмножество E интервала (a, b), такое что на множестве $(a, b) \setminus E$ функция F дифференцируема и $F'(x) = f(x)$. •

Заметим, что теорема 6.1.1 остаётся справедливой и с новым определением первообразной. Согласно новому определению, неопределённым интегралом от функции $\operatorname{sgn} x$ на интервале $(-1, 1)$ является функция $|x| + C$, где C — произвольная постоянная.

Пример 6.1.6. Найдем неопределённый интеграл от функции $f(x) = 1/\cos^2 x$. Нетрудно видеть, что

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C.$$

Справа, однако, стоит функция, которая имеет разрывы (не является непрерывной) в точках $x = \pi 2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому выписанная формула справедлива на произвольном интервале, который не включает ни одной точки разрыва, например, на $(-\pi/2, \pi/2)$. •

Теорема 6.1.7 (*Линейность неопределённого интеграла*). *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если на интервале (a, b) существуют неопределённые интегралы от функций f и g, то на этом интервале существует неопределённый интеграл от функции $\alpha f + \beta g$ и*

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx \quad \textit{для всех} \quad x \in (a, b).$$

(См. замечание 6.1.2 о произвольной постоянной)

Доказательство. Пусть F и G — первообразные функций f и g на интервале (a, b) соответственно, то есть

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C_f \quad \text{и} \quad \int g(x)\, dx = G(x) + C_g.$$

Тогда $(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g$ на $(a, b) \setminus E$, где E — конечное множество. Поэтому

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C \quad \text{для всех} \quad x \in (a, b),$$

а это и есть доказываемое равенство. Здесь мы воспользовались тем, что из непрерывности F и G на (a, b) следует непрерывность $\alpha F + \beta G$ на этом интервале (первообразная должна быть непрерывной). □

Теорема 6.1.8 (*Формула интегрирования по частям*). *Если функции f и g дифференцируемы на (a, b), то*

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx \quad \textit{для всех} \quad x \in (a, b).$$

(В последний раз напомним замечание 6.1.2 о произвольной постоянной)

Доказательство. Поскольку $(fg)' = f'g + fg'$ на (a, b), из линейности неопределённого интеграла мы получаем:

$$\int \big(f(x)\, g(x)\big)'\, dx = \int f'(x)\, g(x)\, dx + \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

или

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = \int \big(f(x)\, g(x)\big)'\, dx - \int f(x)\, g'(x)\, dx.$$

Так как fg является первообразной функции $(fg)'$, мы получаем, что

$$\int \big(f'(x)\, g(x)\big)'\, dx = f(x)\, g(x) - \int \big(f(x)\, g'(x)\big)'\, dx.$$

□

Пример 6.1.9. Найдем первообразную функции xe^x на $\mathbb{R}$. Воспользуемся формулой интегрирования по частям.

$$\int xe^x\, dx = \int x(e^x)'\, dx = xe^x - \int (x)'e^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C. \qquad \bullet$$

Пример 6.1.10. Найдем первообразную функции $\cos^2 x$ на $\mathbb{R}$. Опять воспользуемся формулой интегрирования по частям.

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x\,(\sin x)'\,dx = \cos x \sin x - \int (\cos x)'\,\sin x\,dx =$$
$$= \cos x \sin x + \int (1-\cos^2 x)\,dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\big(\cos x \sin x + x\big) + C. \qquad \bullet$$

Теорема 6.1.11 (*Первая теорема о замене переменной*)**.** *Если дифференцируемая на интервале (a,b) функция F является на этом интервале первообразной функции $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, а $\varphi:(c,d)\to(a,b)$ — дифференцируемая функция, то функция $t\mapsto F\big(\varphi(t)\big)$ является на интервале (c,d) первообразной функции $t\mapsto f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)$ и*

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt = F\big(\varphi(t)\big) + C \quad \textit{для всех} \quad t\in(c,d).$$

Доказательство. Утверждение следует из формулы дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dF\big(\varphi(t)\big)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx}\bigg|_{x=\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt} = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t),$$

поскольку при выполнении условий теоремы эта формула справедлива для всех $t\in(c,d)$. □

Здесь может возникнуть вопрос о том, зачем мы потребовали дифференцируемость функции F на всём интервале (a,b). Это сделано для того, чтобы в фигурирующей в доказательстве формуле был определен член $dF(x)/dx|_{x=\varphi(t)}$. Предположим, что F не дифференцируема в точке $x_0\in(a,b)$. Поскольку мы не требуем от функции φ обратимости, может так случиться, что целый интервал значений переменной t или какое-то другое «большое» множество попадет в точку x_0. Тогда, вообще говоря, указанная формула не будет справедливой.

Пример 6.1.12. Вычислим первообразную функции te^{-t^2} на $\mathbb{R}$. Подберем удовлетворяющие условиям леммы функции f и φ так, чтобы $te^{-t^2} = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)$. Нетрудно проверить, что подходящими являются функции $f(x) = e^{-x}/2$ и $\varphi(t)=t^2$. Поскольку

$$\int \frac{e^{-x}}{2}\,dx = -\frac{e^{-x}}{2} + C,$$

$F(x) = -e^{-x}/2 + C$ и из леммы следует, что

$$\int te^{-t^2}\,dt = -\frac{e^{-t^2}}{2} + C. \qquad \bullet$$

Как показывает этот пример, воспользоваться доказанной теоремой не очень просто. Необходимо обладать определенной долей сообразительности, чтобы угадать функции f и φ. Вообще говоря, вычисление интеграла — не самая простая задача, которая к тому же не всегда может быть решена с использованием только элементарных функций. Однако применение теоремы 6.1.11 можно значительно упростить, добавив в ней одно дополнительное условие, а именно, условие обратимости отображения φ. При этом условия самой теоремы можно существенно ослабить, отказавшись от дифференцируемости функции F на всём интервале (a, b).

Теорема 6.1.13 (*Вторая теорема о замене переменной*)**.** *Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ имеет на интервале (a, b) первообразную и $\varphi : (c, d) \to (a, b)$ является биективным дифференцируемым отображением. Тогда функция $t \mapsto f\bigl(\varphi(t)\bigr)\,\varphi'(t)$ имеет первообразную на интервале (c, d) и*

$$\int f(x)\,dx = \int f\bigl(\varphi(t)\bigr)\,\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \quad \text{\emph{для всех}} \quad x \in (a, b).$$

Доказательство. Пусть F — первообразная функции f на (a, b). Эта функция является непрерывной на (a, b) и дифференцируемой на $(a, b) \setminus E$, где E — конечное множество. Тогда функция $t \mapsto F\bigl(\varphi(t)\bigr)$ непрерывна на (c, d), дифференцируема на $(c, d) \setminus \varphi^{-1}(E)$ и

$$\frac{dF\bigl(\varphi(t)\bigr)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx}\Big|_{x=\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f\bigl(\varphi(t)\bigr)\,\varphi'(t) \quad \text{для всех} \quad t \in (c, d) \setminus \varphi^{-1}(E).$$

Поскольку φ — биективное отображение, множество $\varphi^{-1}(E)$ является конечным, поэтому функция $t \mapsto F\bigl(\varphi(t)\bigr)$ является первообразной функции $t \mapsto f\bigl(\varphi(t)\bigr)\,\varphi'(t)$ на (c, d), а это и есть утверждение теоремы. □

Теперь мы можем находить интеграл от функции f, пытаясь при помощи замены переменной упростить подынтегральное выражение. Конечно, при этом необходимо следить, чтобы все преобразования имели смысл.

Пример 6.1.14. Как и в примере 6.1.12, найдем первообразную функции xe^{-x^2} на $\mathbb{R}$. Сначала рассмотрим интервал $(0, +\infty)$ и отображение $\varphi_+ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, задаваемое формулой $x = \varphi_+(t) = \sqrt{t}$. Тогда $\varphi'_+(t) = 1/(2\sqrt{t})$, $\varphi_+^{-1}(x) = x^2$ и

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \int \sqrt{t}\,e^{-t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt\Big|_{t=x^2} = \frac{1}{2}\int e^{-t}\,dt\Big|_{t=x^2} = -\frac{e^{-t}}{2}\Big|_{t=x^2} + C_+ = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C_+ = F_+.$$

Рассмотрим теперь интеграл при $x \in (-\infty, 0)$ и отображение $\varphi_- : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$, задаваемое формулой $x = \varphi_-(t) = -\sqrt{t}$. Тогда $\varphi'_-(t) = -1/\bigl(2\sqrt{t}\bigr)$ и $\varphi_-^{-1}(x) = x^2$. Совершенно аналогично мы получим:

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-t}\,dt\Big|_{t=x^2} = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C_- = F_-.$$

Чтобы получить первообразную на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$, мы должны склеить первообразные F_+ и F_- в точке $x = 0$ по непрерывности. Для этого достаточно положить, что $C_+ = C_- = C$. Таким образом,

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что полученная первообразная дифференцируема и в точке $x = 0$. •

Пример 6.1.15. Найдем первообразную функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Так как эта функция определена только при $x^2 \geqslant 1$, мы должны выбрать один из интервалов $(-\infty, -1)$ или $(1, \infty)$. Возьмем второй из них. При $x \in (1, \infty)$, сделав замену переменной $x = \varphi(t) = \operatorname{ch} t$, мы получим:

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}\,\operatorname{sh} t\,dt = \int \operatorname{sh}^2 t\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(e^{2t} + e^{-2t} - 2\right) dt = \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{8} - \frac{t}{2} + C\right)_{t=\operatorname{arch} x} = \left(\frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{2} - \frac{t}{2} + C\right)_{t=\operatorname{arch} x}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{ch} t\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}}{2} - \frac{t}{2} + C\right)_{t=\operatorname{arch} x} = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{\operatorname{arch} x}{2} + C.$$

•

Пример 6.1.16. Часто, чтобы найти нужную замену переменной в интеграле, необходимо иметь некоторый опыт вычисления производных. Найдем, например, первообразную функции $f(x) = (x^2+1)^{-1}$ на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$. Воспользуемся заменой переменной $x = \operatorname{tg} y$, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Заметим, что $(\operatorname{tg} y)' = 1/\cos^2 y$ и $\operatorname{tg}^2 y + 1 = 1/\cos^2 y$. Поэтому

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}\,dy\Big|_{y=\operatorname{arctg} x} = \operatorname{arctg} x + C.$$

Мы могли бы сделать и другую замену: $x = \operatorname{ctg} t$, $t \in (0, \pi)$. Поскольку $(\operatorname{ctg} t)' = -1/\sin^2 t$ и $\operatorname{ctg}^2 y + 1 = 1/\sin^2 y$,

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = -\int \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt\Big|_{t=\operatorname{arcctg} x} = -\operatorname{arcctg} x + C.$$ •

6.1.2 Интегрирование рациональных функций

Рациональные функции.
Функция $R(x)$ называется *рациональной*, если она является отношением двух полиномов: $R(x) = P(x)/Q(x)$. Мы будем интегрировать вещественные рациональные функции, поэтому предположим, что P и Q — полиномы с вещественными коэффициентами. Если степень полинома P меньше степени полинома Q, то мы назовем R *правильной рациональной функцией*. Любую рациональную функцию можно представить в виде суммы полинома и правильной рациональной функции. Поскольку интегрирование полинома не вызывает затруднений (его первообразная является полиномом на единицу большей степени), интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию правильной рациональной функции. Как известно из курса алгебры, любая правильная рациональная функция представима в таком виде:

$$R(x) = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{k_j} \frac{\alpha_{jk}}{(x-\sigma_j)^k} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{m_j} \frac{\beta_{jm}x + \gamma_{jm}}{(x^2+p_jx+q_j)^m},$$

где α_{jk}, β_{jm}, γ_{jm}, σ_j, p_j и q_j — некоторые вещественные, а ℓ, k_j, n и m_j — натуральные числа. Эти числа определены однозначно. Кроме того, $\sigma_i \neq \sigma_j$ и $(p_i, q_i) \neq (p_j, q_j)$ при $i \neq j$. Заметим ещё, что полиномы $x^2 + p_jx + q_j$ не имеют вещественных корней. У каждого из них есть два комплексно сопряженных корня. Таким образом, учитывая линейность неопределенного интеграла, мы свели задачу к нахождению первообразных от следующих типов функций:

$$\frac{1}{(x-\sigma)^k}, \quad \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+px+q)^m},$$

причем x^2+px+q имеет два комплексно сопряженных корня.

Интеграл от первой из этих функций вычисляется просто:

$$\int \frac{1}{(x-\sigma)^k}\,dx = \begin{cases} \ln|x-\sigma|+C, & k=1, \\ -\dfrac{1}{k-1}\,\dfrac{1}{(x-\sigma)^{k-1}}+C, & k>1. \end{cases}$$

Заметим, что эти формулы справедливы либо на интервале $(-\infty,\sigma)$, либо на (σ,∞). Константы на этих интервалах могут быть разными.

Чтобы вычислить интеграл от функций второго типа, сделаем в нём замену переменной $x=y-p/2$ и обозначим $a^2=q-p^2/4$, $b=\gamma-\beta p/2$, где $a,b\in\mathbb{R}$. Мы обозначили $p^2/4-q$ через $-a^2$, поскольку эта величина является дискриминантом не имеющего вещественных корней полинома x^2+px+q и по этой причине должна быть отрицательной. Тогда получим:

$$\int \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \int \frac{\beta y+b}{(y^2+a^2)^m}\,dy\Big|_{y=x+p/2}.$$

Сначала с помощью замены переменной $u=y^2+a^2$ (то есть $y=\pm\sqrt{u-a^2}$) посчитаем интеграл

$$\int \frac{y}{(y^2+a^2)^m}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^m} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln|u|, & m=1, \\ \dfrac{1}{2(1-m)}\,\dfrac{1}{u^{m-1}}, & m>1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int \frac{y}{(y^2+a^2)^m}\,dy = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln|y^2+a^2|, & m=1, \\ \dfrac{1}{2(1-m)}\,\dfrac{1}{(y^2+a^2)^{m-1}}, & m>1. \end{cases}$$

Здесь можно ещё заметить, что $y^2+a^2=x^2+px+q$.

Нам осталось посчитать интеграл

$$I_m = \int \frac{1}{(y^2+a^2)^m}\,dy.$$

Для этого мы воспользуемся одним интересным приёмом, а именно, выразим I_{m+1} через I_m и, вычислив I_1, найдем I_m для любого $m\in\mathbb{N}$. Интегрируя по частям, мы получим

$$\begin{aligned} I_m = \int \frac{y'}{(y^2+a^2)^m}\,dy &= \frac{y}{(y^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{y^2}{(y^2+a^2)^{m+1}}\,dy \\ &= \frac{y}{(y^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{y^2+a^2}{(y^2+a^2)^{m+1}}\,dy - 2ma^2\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, нами выведено следующее рекуррентное соотношение:

$$I_{m+1} = \frac{1}{2ma^2}\Big((2m-1)\,I_m + \frac{y}{(y^2+a^2)^m}\Big).$$

Чтобы вычислить I_m для каждого $m \in \mathbb{N}$, нам осталось найти I_1. Этот интеграл мы уже вычислили в примере 6.1.16:

$$I_1(y) = \int \frac{1}{y^2+a^2}\,dy = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{a} + C.$$

Итак, мы вывели процедуру вычисления неопределенного интеграла от любой рациональной функции.

Пример 6.1.17. Вычислим первообразную правильной рациональной функции

$$R(x) = \frac{2x+1}{x^2(x^2-x+1)}.$$

Сначала методом неопределенных коэффициентов разложим эту функцию на сумму простейших рациональных функций:

$$R(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\beta_1 x + \gamma_1}{x^2-x+1} = \frac{(\alpha_1+\beta_1)x^3 + (\alpha_2-\alpha_1+\gamma_1)x^2 + (\alpha_1-\alpha_2)x + \alpha_2}{x^2(x^2-x+1)}$$

Поскольку числитель должен быть равен $2x+1$, мы получаем следующую систему для определения коэффициентов α_1, α_2, β_1 и γ_1:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= 0, \\ \alpha_2 - \alpha_1 + \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= 2, \\ \alpha_2 &= 1, \end{aligned}$$

решением которой являются числа $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = -3$ и $\gamma_1 = 2$. Таким образом,

$$R(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-3x+2}{x^2-x+1}.$$

Интегралы от первых двух слагаемых вычисляются просто:

$$\int \frac{3}{x}\,dx = 3\ln|x| + C, \quad \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C.$$

Для вычисления интеграла от третьего слагаемого преобразуем его, сделав замену переменной $x = y + 1/2$, как это было описано выше:

$$\int \frac{-3x+2}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{-3y+1/2}{y^2+3/4}\,dy\Big|_{y=x-1/2}.$$

Теперь

$$-3\int \frac{y}{y^2+3/4}\,dy\Big|_{y=x-1/2} = -\frac{3}{2}\,\ln|y^2+3/4|\Big|_{y=x-1/2} + C = -\frac{3}{2}\,\ln|x^2-x+1| + C$$

и
$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+3/4}\,dy\Big|_{y=x-1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{2y}{\sqrt{3}}\Big|_{y=x-1/2} + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$
Таким образом,
$$\int R(x)\,dx = 3\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Необходимо ещё отметить, что правая часть в этом равенстве не является непрерывной функцией, поэтому она является первообразной на любом интервале, который не содержит точек разрыва. •

Тригонометрические рациональные функции.
Покажем, как интегрируются функции вида $R(\cos x, \sin x)$, где $R(u,v)$ — рациональная функция от двух аргументов. Такие функции определяются следующим образом. Полиномом (или многочленом) степени n от аргументов u и v называется выражение вида
$$P_n(u,v) = a_{00} + a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + \ldots + a_{0n}v^n,$$
где a_{ij} — некоторые вещественные числа. Рациональной функцией $R(u,v)$ от двух аргументов называется отношение вида $P_n(u,v)/Q_m(u,v)$, где $P_n(u,v)$ и $Q_m(u,v)$ — многочлены от двух аргументов степеней n и m соответственно.

Для того, чтобы посчитать интеграл
$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx,$$
можно применить универсальную замену переменной $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$. При этом используются стандартные тригонометрические формулы:
$$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$
При этом $x = \varphi(t) = 2\,\mathrm{arctg}\,t$ и $\varphi'(t) = 2/(1+t^2)$. Таким образом, интегрирование тригонометрической рациональной функции сводится к задаче интегрирования рациональной функции, которую мы уже решили:
$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\Big)\,\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\mathrm{tg}(x/2)}.$$

Пример 6.1.18. Найдем первообразную функции $1/(2+\sin x)$. С помощью приведенной выше замены переменной мы получим:
$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t^2+t+1}\Big|_{t=\mathrm{tg}(x/2)}.$$
Поскольку полином t^2+t+1 не имеет вещественных корней, мы стандартным образом, как это было описано выше, получим, что
$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) + C. \quad \bullet$$

Хотя замена $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и является универсальной, она часто приводит к довольно сложным рациональным функциям и, как следствие, к громоздким выкладкам. Поэтому к каждому конкретному интегралу надо подходить творчески, посмотреть, не упрощается ли он с помощью какой-либо более подходящей замены переменной или другого приема. Например, интеграл из примера 6.1.10 мы тоже могли бы посчитать с помощью универсальной замены, но такой путь оказался бы значительно сложнее.

Пример 6.1.19. Вычислим первообразную функции $(\cos x + \sin x)^{-2}$. Мы сделаем это, используя замену переменной $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{(\cos x + \sin x)^2} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)^2} = \int \frac{dt}{(1+t)^2}\Big|_{t=\operatorname{tg} x} = -\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} + C. \qquad \bullet$$

6.2 Определённый интеграл

6.2.1 Понятие интеграла Римана

Геометрический смысл определенного интеграла.
Начальное понятие определенного интеграла встречается уже у древних греков. Они умели считать площади некоторых фигур и объемы некоторых тел. Так, Архимед смог посчитать объем конуса и шара. Если перевести их рассуждения на современный язык, то они будут примерно следующими. Предположим, что мы хотим найти площадь S фигуры $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant A,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, $A > 0$. Конечно, мы пока не определили, что такое площадь фигуры, но мы умеем находить площадь прямоугольника и предполагаем, что $S(G_1) \leqslant S(G_2)$, если $G_1 \subset G_2$.

Разобьем отрезок $[0, A]$ на n равных частей, отметив на нем на одинаковом расстоянии друг от друга $n+1$ точку $x_k = Ak/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Введем обозначения:

$$Q_*^k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k,\ 0 \leqslant y \leqslant x_{k-1}^2\},$$
$$Q_k^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k,\ 0 \leqslant y \leqslant x_k^2\}$$

при $k = 1, \ldots, n$. Тогда $S(Q_*^k) = x_{k-1}^2 A/n$ и $S(Q_k^*) = x_k^2 A/n$. Заметим, что

$$\bigcup_{k=1}^n Q_*^k \subset G \subset \bigcup_{k=1}^n Q_k^*,$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^n S(Q_*^k) \leqslant S(G) \leqslant \sum_{k=1}^n S(Q_k^*)$$

и это неравенство справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом,

$$\frac{A^3}{n^3}\sum_{k=1}^n (k-1)^2 \leqslant S(G) \leqslant \frac{A^3}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2.$$

Упражнение 6.2.1. Доказать, что $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}\, n\big(n+\frac{1}{2}\big)(n+1)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.
Подсказка: просуммировать по k от 1 до n выражение $(k+1)^3 - k^3$. $\bullet$