жит правой части. Если $a \in X \cup Y$ и $a \in X \cup Z$, то $a \in X$ или $a \in Y \cap Z$. Следовательно, a принадлежит левой части равенства (4б). □

Если X — множество, то множество всех его подмножеств будем называть *множеством-степенью* X и обозначать через $P(X)$.

Пусть J — непустое множество и X_i для $i \in J$ — некоторые множества. *Объединением* $\bigcup\limits_{i \in J} X_i$ и *пересечением* $\bigcap\limits_{i \in J} X_i$ множеств X_i, $i \in J$, будем называть множества, определенные следующим образом:

$$a \in \bigcup_{i \in J} X_i \iff (a \in X_i \text{ для некоторого } i \in J),$$

$$a \in \bigcap_{i \in J} X_i \iff (a \in X_i \text{ для всех } i \in J).$$

Для множества X через $\bigcup X$ и $\bigcap X$ будут обозначаться соответственно множества $\{a \mid a \in b \text{ для некоторого } b \in X\}$ и $\{a \mid a \in b \text{ для всех } b \in X\}$.

Упражнения

1. Сколько различных вхождений имеет пустое слово Λ в слово длины n?
2. Показать, что число различных подслов слова α длины n не превышает $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$.
3. Для каких слов α длины n число различных подслов α равно $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$?
4. Пусть множества $X_0, \ldots, X_{n+1}$ являются подмножествами некоторого множества Y. Обозначим через $\overline{X_i}$ множество $Y \setminus X_i$. Показать, что

   а) $\overline{\bigcup\limits_{i \leqslant n} X_i} = \bigcap\limits_{i \leqslant n} \overline{X_i}$; б) $\overline{\bigcap\limits_{i \leqslant n} X_i} = \bigcup\limits_{i \leqslant n} \overline{X_i}$; в) $X_0 \cap X_1 = X_0 \setminus (X_0 \setminus X_1)$.

§ 1.2. Язык исчисления высказываний

Опр Будем говорить, что задано *исчисление* I, если заданы следующие четыре множества:

а) алфавит $A(I)$;

б) множество $E(I)$ слов алфавита $A(I)$, называемое *множеством выражений исчисления* I;

в) множество $Ax(I)$ выражений исчисления I, называемое *множеством аксиом исчисления* I;

г) множество $R(I)$ правил вывода исчисления I.

Правило вывода в этой книге будет записываться так:

$$\frac{S_1, \ldots, S_n}{S}.$$

При этом $S_1, \ldots, S_n$ и S будут некоторыми схемами выражений данного исчисления, выражающими их определенную структурную зависимость. Схемы $S_1, \ldots, S_n$ будут называться *посылками*, а схема S — *заключением данного правила*. Число n называется *местностью* данного правила; n-местное правило будем называть также *n-посылочным* правилом.

Если конкретные выражения $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ и Φ удовлетворяют структурным условиям данного правила, выраженные схемами $S_1, \ldots, S_n$ и S, то запись

$$\frac{\Phi_1, \ldots, \Phi_n}{\Phi}$$

будет называться применением данного правила, а выражение Φ — результатом применения этого правила к выражениям $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ или что Φ получается из $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ по этому правилу вывода.

Опр Пару $\langle A(I), E(I) \rangle$, состоящую из алфавита $A(I)$ и множества выражений $E(I)$ исчисления I, будем называть ***языком*** исчисления I и обозначать через $L(I)$. Пусть даны два исчисления I_1 и I_2. Если $A(I_1) \subseteq A(I_2)$ и $E(I_1) \subseteq E(I_2)$, то будем говорить, что язык $L(I_2)$ исчисления I_2 является *расширением языка* $L(I_1)$ исчисления I_1, и обозначать это так: $L(I_2) \subseteq L(I_1)$. [1)]

Если дано исчисление I, то множество *доказуемых выражений* или *теорем исчисления* I определяется как наименьший класс $T(I) \subseteq E(I)$, содержащий множество аксиом исчисления I и обладающий следующим свойством:

(*) если выражение Φ является результатом применения некоторого правила $\rho \in R(I)$ к выражениям $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \in T(I)$, то $\Phi \in T(I)$. [2)]

Опр ***Высказыванием*** в русском языке мы называем повествовательное предложение, про которое можно утверждать, что оно истинно или ложно. Например, высказывание «**вода — продукт горения водорода**» истинно, а высказывание «**все нечетные натуральные числа простые**» ложно. Из высказываний A, B в русском языке мы можем образовывать более сложные высказывания такие, как «A **и** B», «A **или** B», «**неверно, что** A», «**если** A, **то** B». Если мы знаем, истинно или ложно каждое из высказываний A, B, то мы можем определить, истинны или ложны

1) Это обозначение не совсем согласуется с уже введенным обозначением включения для множеств, однако оно удобно и путаницы не вызывает.

2) В дальнейшем нам будет удобнее работать с равносильным, но более конструктивным определением множества теорем исчисления.

выписанные выше сложные высказывания. Например, если A истинно, а B ложно, то высказывание **«если A, то B»** ложно. Однако иногда мы можем утверждать об истинности сложного высказывания, не зная, истинны или ложны высказывания, из которых оно составлено. Например, каковы бы ни были высказывания A и B, высказывание **«неверно, что A, или если B, то A»** всегда истинно. В этом случае говорим, что схема **«неверно, что A, или если B, то A»** тождественно истинна. Одной из основных задач исчисления высказываний, к изучению которого мы приступаем, является описание тождественно истинных схем. Для этого придется заменить русский язык формальным языком, который не допускает двусмысленностей.

Опр *Алфавит исчисления высказываний*, которое будем обозначать через ИВ, состоит из трех групп символов.

1. *Пропозициональные переменные*: $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n, \ldots$, где n — натуральное число.
2. *Логические символы* или *связки*: *импликация* $\to$, *конъюнкция* $\wedge$, *дизъюнкция* $\vee$, *отрицание* $\neg$, *символ следования* $\vdash$, *логическая константа* $\mathfrak{F}$.
3. *Вспомогательные символы*: *левая скобка* (, *правая скобка*), *запятая* , .

Определение. *Формулой* ИВ назовем слово алфавита ИВ, удовлетворяющее следующему индуктивному (по длине слова) определению.

1. Пропозициональные переменные и логическая константа являются формулами (будем называть их *элементарными* или *атомарными*).
2. Если Φ и Ψ — формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$ и $\neg\Phi$ — формулы.

Из определения следует, что $(Q_0 \wedge Q_1) \vee Q_0$ — не формула (нет внешних скобок). Однако в целях сокращения записи мы часто будем опускать внешние скобки. Таким образом, $(Q_0 \wedge Q_1) \vee Q_0$ будет сокращенной записью формулы $((Q_0 \wedge Q_1) \vee Q_0)$.

В дальнейшем формулы исчисления высказываний будут обозначаться буквами Φ, Ψ, X, а пропозициональные переменные — буквами P, R, причем Φ, Ψ, X, P, R могут иметь индексы.

Опр *Подформулой* Ψ формулы Φ ИВ будем называть подслово Φ, являющееся формулой ИВ.

Докажем теперь утверждение об однозначности разложения формулы ИВ.

Предложение 1.2.1. *Всякая неатомарная формула Φ ИВ представима в одном и только одном из следующих видов*: $(\Psi \wedge \mathrm{X})$, $(\Psi \vee \mathrm{X})$, $(\Psi \to \mathrm{X})$ *или* $\neg\Psi$ *для однозначно определенных формул* Ψ *и* X.

Для доказательства предложения установим сначала один технический факт.

Лем **Лемма 1.2.2.** *Если* Φ *и* Ψ — *формулы* ИВ *и* Φ — *начало* Ψ, *то* $\Phi = \Psi$.

Доказательство. Доказывать лемму будем индукцией по длине формулы Φ. Если Φ атомарна, то и Ψ должна быть атомарной, так как в противном случае Ψ начинается со скобки или с символа $\neg$ и тогда Φ не может быть началом Ψ. Следовательно, $\Phi = \Psi$.

Пусть Φ не атомарна и имеет вид $\neg\Phi'$, тогда Ψ должна иметь вид $\neg\Psi'$, причем, как нетрудно усмотреть из определения формулы, Φ' и Ψ' должны быть формулами. Кроме того, Φ' является, очевидно, началом Ψ'. Индукционное предположение дает $\Phi' = \Psi'$ и, следовательно, $\Phi = \neg\Phi' = \neg\Psi' = \Psi$.

Пусть Φ имеет вид $(\Phi_0\tau\Phi_1)$, где Φ_0 и Φ_1 — формулы ИВ, τ — один из символов $\wedge$, $\vee$ или $\to$. Тогда Ψ начинается со скобки (и поэтому может быть представлена в виде $(\Psi_0\tau'\Psi_1)$, где Ψ_0 и Ψ_1 — формулы и τ' — один из символов $\wedge$, $\vee$ или $\to$. Так как $(\Phi_0\tau\Phi_1)$ является началом $(\Psi_0\tau'\Psi_1)$, то слово Φ_0 будет началом слова $\Psi_0\tau'\Psi_1$, Ψ_0 — тоже начало этого слова. Из двух начал одного и того же слова одно из них есть начало другого (нужно взять начало меньшей длины). Значит, Φ_0 — начало Ψ_0, или Ψ_0 — начало Φ_0. В любом случае применимо индукционное предположение и, следовательно, $\Phi_0 = \Psi_0$, $\tau = \tau'$ и Φ_1 — начало Ψ_1. Снова, применив индукционное предположение, получаем, что $\Phi_1 = \Psi_1$ и $\Phi = (\Phi_0\tau\Phi_1) = (\Psi_0\tau'\Psi_1) = \Psi$. □

Доказательство предложения 1.2.1. Если формула Φ начинается с символа $\neg$, то доказывать нечего. Пусть Φ представлена в виде $(\Phi_0\tau\Phi_1)$, где τ — один из символов $\wedge$, $\vee$ или $\to$, а Φ_0, Φ_1 — формулы ИВ, и в виде $(\Phi_0'\tau'\Phi_1')$, где τ' — один из символов $\wedge$, $\vee$ или $\to$, а Φ_0', Φ_1' — формулы ИВ. Тогда Φ_0 — начало Φ_0' или Φ_0' — начало Φ_0. По лемме $\Phi_0 = \Phi_0'$ поэтому $\tau = \tau'$ и $\Phi_1 = \Phi_1'$. Следовательно, представление $\Phi = (\Phi_0\tau\Phi_1)$ единственно. □

Следствие 1.2.3. *Пусть* Φ — *формула* ИВ. *Тогда с каждым вхождением символа* (*или* $\neg$ *в формулу* Φ *однозначно связано некоторое вхождение подформулы формулы* Φ, *первым символом которого является рассматриваемое вхождение* (*или* $\neg$ *соответственно.*

Доказательство. Индукцией по длине формулы с каждым вхождением символа (или $\neg$ можно связать *некоторое* такое вхождение подформулы, а лемма 1.2.2 позволяет утверждать единственность такого вхождения. □

Предложение 1.2.4. *Если* Φ — *формула* ИВ, η, θ — *вхождения в* Φ *подформул* Ψ, X *соответственно, то либо* η *и* θ *не имеют* *общих вхождений символов алфавита* ИВ, *либо одно из них целиком содержится в другом.*

Доказательство. Если η и θ имеют общие вхождения символов, то первое вхождение первого символа η или θ должно быть общим. Пусть первое вхождение первого символа η входит в θ. Если Ψ — атомарная формула, то утверждение очевидно. Пусть Ψ не атомарна, тогда первый символ Ψ есть (или $\neg$. По следствию 1.2.3 этот символ однозначно определяет вхождение некоторой подформулы Ψ' в X. Но эта подформула будет подформулой и в Φ. В формуле Φ с рассматриваемым вхождением символа (или $\neg$ связано вхождение η подформулы Ψ. В силу единственности Ψ должна совпадать с Ψ', следовательно, η целиком содержится в θ. □

Если все вхождения подформулы Ψ в формулу Φ заменить на формулу X, то получим новую формулу, которую обозначим через $(\Phi)^{\Psi}_{\mathrm{X}}$. Такое определение корректно, так как из предложения 1.2.4 следует, что два различных вхождения подформулы Ψ в Φ не имеют общих вхождений символов алфавита ИВ.

Определение. *Секвенцией* ИВ называется слово алфавита ИВ вида

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n \vdash \Psi,$$

где $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Psi$ — формулы ИВ, n — натуральное число. Отметим, что при $n = 0$ это слово будет иметь вид $\vdash \Psi$.

Часто секвенции будут обозначаться через $\Gamma \vdash \Psi$, где Γ обозначает последовательность формул ИВ, может быть, пустую.

Если формулы ИВ можно рассматривать как «формы» сложных высказываний нашего языка, то секвенции являются «формами» утверждений (теорем), в которых можно отчетливо выделить условия (посылки) и заключение. А именно, рассматривая знак $\vdash$ как знак (логического) следования, секвенцию $\Phi_0, \ldots, \Phi_n \vdash \Psi$ можно понимать как утверждение вида «**Из (истинности) посылок $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ (логически) следует высказывание Ψ**».

Правила вывода ИВ, которые будут описаны в следующем параграфе, отражают (формализуют) некоторые простейшие стандартные логические способы рассуждения, позволяющие переходить от одних истинных утверждений (теорем) к другим истинным утверждениям (теоремам).

Упражнения

1. Используя предложение 1.2.1, показать, что для любого слова α алфавита ИВ мы через конечное число шагов сможем определить, является ли α формулой ИВ или нет.

2. Заменим в определении формулы ИВ п. 2 на следующий: если Φ и Ψ — формулы, то $(\Phi) \wedge (\Psi)$, $(\Phi) \vee (\Psi)$, $(\Phi) \to (\Psi)$ и $\neg(\Phi)$ — формулы. Показать, что при таком определении имеют место утверждения, аналогичные предложениям 1.2.1 и 1.2.4.

§ 1.3. Система аксиом и правил вывода

В дальнейшем мы часто будем иметь дело не с конкретными формулами и секвенциями, а с так называемыми схемами формул и секвенций. Буквы Φ, Ψ, X (буквы Γ, Δ, Θ), возможно с индексами из множества натуральных чисел, будем называть *переменными для формул* (*последовательностей формул*). Пусть алфавит B содержит кроме символов алфавита ИВ переменные для формул и последовательностей формул.

Схемой секвенций (*формул*) ИВ мы будем называть такое слово в алфавите B, что при любых подстановках в это слово вместо переменных для формул и последовательностей формул соответственно конкретных формул и последовательностей конкретных формул получаются конкретные секвенции (формулы) ИВ. Результаты таких подстановок будут называться частными случаями этой схемы. Например, $\Psi, \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi$ и $\Phi \to (X_1 \wedge X_2)$ будут схемами секвенций и формул соответственно, а

$$Q_0 \wedge \neg Q_1, \neg Q_0, \neg(Q_2 \to Q_1) \vdash Q_3 \vee (Q_0 \wedge \neg Q_1),$$
$$((Q_1 \to \neg Q_1) \wedge Q_0) \to (Q_3 \wedge \neg(Q_2 \vee \neg Q_0))$$

— частными случаями соответствующих схем [1]).

Определение. Схема секвенций

$$\Phi \vdash \Phi$$

называется *схемой аксиом* ИВ. Частный случай схемы аксиом будем называть *аксиомой*.

***Правилами вывода* ИВ** являются следующие:

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\ \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$,

2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$,

7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$,

8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\ \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$,

---

[1]) Когда значения переменных для формул и последовательностей формул в схеме C секвенций (формул) в тексте зафиксированы, схему C будем называть просто секвенцией (формулой).