2. Заменим в определении формулы ИВ п. 2 на следующий: если Φ и Ψ — формулы, то $(\Phi) \wedge (\Psi)$, $(\Phi) \vee (\Psi)$, $(\Phi) \to (\Psi)$ и $\neg(\Phi)$ — формулы. Показать, что при таком определении имеют место утверждения, аналогичные предложениям 1.2.1 и 1.2.4.

§ 1.3. Система аксиом и правил вывода

В дальнейшем мы часто будем иметь дело не с конкретными формулами и секвенциями, а с так называемыми схемами формул и секвенций. Буквы Φ, Ψ, X (буквы Γ, Δ, Θ), возможно с индексами из множества натуральных чисел, будем называть *переменными для формул* (*последовательностей формул*). Пусть алфавит B содержит кроме символов алфавита ИВ переменные для формул и последовательностей формул.

Схемой секвенций (*формул*) ИВ мы будем называть такое слово в алфавите B, что при любых подстановках в это слово вместо переменных для формул и последовательностей формул соответственно конкретных формул и последовательностей конкретных формул получаются конкретные секвенции (формулы) ИВ. Результаты таких подстановок будут называться частными случаями этой схемы. Например, $\Psi, \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi$ и $\Phi \to (X_1 \wedge X_2)$ будут схемами секвенций и формул соответственно, а

$$Q_0 \wedge \neg Q_1, \neg Q_0, \neg(Q_2 \to Q_1) \vdash Q_3 \vee (Q_0 \wedge \neg Q_1),$$
$$((Q_1 \to \neg Q_1) \wedge Q_0) \to (Q_3 \wedge \neg(Q_2 \vee \neg Q_0))$$

— частными случаями соответствующих схем [1]).

Определение. Схема секвенций

$$\Phi \vdash \Phi$$

называется *схемой аксиом* ИВ. Частный случай схемы аксиом будем называть *аксиомой.*

***Правилами вывода* ИВ** являются следующие:

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\ \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$,

2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$,

7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$,

8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\ \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$,

[1]) Когда значения переменных для формул и последовательностей формул в схеме C секвенций (формул) в тексте зафиксированы, схему C будем называть просто секвенцией (формулой).

3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$,

4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$,

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$,

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash X;\ \Gamma, \Psi \vdash X;\ \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}{\Gamma \vdash X}$,

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma \vdash \Phi}$,

10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\ \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash \mathfrak{F}}$,

11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash X}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash X}$,

12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Как отмечалось в конце предыдущего параграфа, правила вывода ИВ формализуют определенные стандартные логические способы рассуждений. Прокомментируем на содержательном уровне, не очень строго, правила 1–12 с этой точки зрения.

Правила 1–3 — это просто правила, разъясняющие смысл союза «и» (конъюнкции).

Правила 4, 5 так же относятся к пояснению смысла союза «или» (дизъюнкции).

Правило 6 формализует способ рассуждения «разбором (двух) возможных случаев». Если при выполнении посылок Γ справедливо Φ или X, а Ψ справедливо при выполнении условий Γ и Φ, а также при выполнении условий Γ и X, то Ψ всегда справедливо при выполнении посылок Γ. Это устанавливается рассмотрением двух возможных случаев (один из которых обязательно выполняется): 1) выполнены условия Γ и условие Φ, 2) выполнены условия Γ и условие X.

Правило 7 формализует прием эквивалентной переформулировки теоремы, позволяющий одно из условий теоремы помещать в ее заключение в виде посылки.

Правило 8 — это одно из логических правил (правило modus ponens или правило отделения), отмеченных еще Аристотелем; оно указывает, как можно освобождаться от посылки в заключении.

Правило 9 формализует правило «рассуждения от противного». Предположим, что условия Γ и $\neg\Phi$ могут одновременно выполняться; приходя к противоречию, выражаемому логической константой $\mathfrak{F}$, заключаем, что из выполнимости условий Γ всегда вытекает выполнимость Φ.

Правило 10 — это правило «обнаружения (выведения) противоречия» для последовательности посылок Γ.

Правило 11 носит совершенно технический формальный характер: перестановка посылок не влияет на истинность заключения.

Правило 12, называемое иногда «утончением» или правилом лишней посылки, отражает тривиальный факт, что, добавляя к условиям теоремы лишнее условие, мы не нарушаем истинности заключения теоремы.

Если в правилах вывода в качестве Γ и Γ_1 берутся конкретные последовательности формул ИВ, а в качестве Φ, Ψ, X — конкретные формулы, то получаются *частные случаи* (или *применения*) *правил вывода*. Правила 1–10 называются *основными*, а правила 11–12 — *структурными*.

Если Θ — применение правила вывода k, то будем говорить, что *секвенция, стоящая в Θ под чертой, получается из секвенций, стоящих над чертой, по правилу k*.

Определение. *Линейным доказательством* в ИВ называется конечная последовательность $S_0, \ldots, S_n$ секвенций ИВ, которая удовлетворяет следующему условию: каждая секвенция S_i, $i \leqslant n$, либо является аксиомой, либо получается из некоторых S_j, $j < i$, по одному из правил вывода 1–12.

Секвенция S называется *доказуемой* в ИВ или *теоремой* ИВ, если существует линейное доказательство $S_0, \ldots, S_n$ в ИВ, у которого $S_n = S$. Формула Φ ИВ называется *доказуемой* в ИВ, если в ИВ доказуема секвенция $\vdash \Phi$.

Пусть $S_0, \ldots, S_n$ — линейное доказательство в ИВ. Из определения легко следует, что для любого $i \leqslant n$ последовательность $S_0, \ldots, S_i$ будет линейным доказательством в ИВ; и если $S'_0, \ldots, S'_n$ — другое доказательство в ИВ, то последовательность $S_0, \ldots, S_n, S'_0, \ldots, S'_n$ — тоже линейное доказательство в ИВ.

Определим индуктивно понятие *дерева*:

1). Всякая секвенция является деревом.

2). Если $D_0, \ldots, D_n$ — деревья и S — секвенция, то

$$\frac{D_0;\ \ldots;\ D_n}{S}$$

— также дерево [1]).

Одна и та же секвенция может входить в дерево несколько раз. Секвенцию вместе с ее местом расположения в дереве D будем называть *вхождением секвенции в дерево D*. Вхождение секвенции в дерево D, над которым нет горизонтальной черты, будем называть *начальным* в D. Вхождение секвенции в D, под которым нет горизонтальной черты, будем называть *заключительным* в D. Часто будет употребляться слово «секвенция» вместо «вхождение секвенции», если из контекста ясно, о каком вхождении идет речь. Ясно, что дерево может иметь много начальных секвенций, но заключительная секвенция — только одна. Часть дерева, состоящая из секвенций, расположенных непосредственно над некоторой чертой, под той же чертой, и самой черты, называется *переходом*.

[1]) При написании конкретных деревьев знак ; часто будет опускаться.

Определение. Дерево D назовем *доказательством* в ИВ *в виде дерева*, если все его начальные секвенции — аксиомы ИВ, а переходы — применения правил вывода 1–12. Если S является заключительной секвенцией доказательства D в ИВ в виде дерева, то D называется *доказательством S в виде дерева* или *деревом вывода S* в ИВ.

Пусть h — функция, определенная на секвенциях (точнее: на вхождениях секвенций) дерева D и принимающая в качестве значений натуральные числа, со следующими свойствами:

1). $h(S) = 0$, если S является заключительной секвенцией дерева D.

2). Если

$$\frac{S_0; \ldots ; S_n}{S}$$

— переход в дереве D, то

$$h(S_0) = \ldots = h(S_n) = h(S) + 1.$$

Очевидно, что условия 1), 2) определяют функцию h однозначно. Число $h(S)$ назовем *высотой* (вхождения) *секвенции S в дереве D*. Максимальную высоту секвенций, входящих в D, назовем *высотой дерева D*.

Предложение 1.3.1 *Секвенция S является теоремой* ИВ $\Longleftrightarrow$ *существует доказательство секвенции S в* ИВ *в виде дерева.*

Доказательство ($\Longrightarrow$) проведем индукцией по длине n линейного доказательства секвенции S. Пусть $S_1, \ldots, S_{n-1}, S$ — линейное доказательство в ИВ. Если S — аксиома, то S будет доказательством секвенции S в виде дерева. Пусть $D_1, \ldots, D_{n-1}$ — доказательства секвенций $S_1, \ldots, S_{n-1}$ в виде дерева. Если $\frac{S_{i_1}; \ldots ; S_{i_k}}{S}$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k < n$, — применение некоторого правила ИВ, то дерево

$$\frac{D_{i_1}; \ldots ; D_{i_k}}{S}$$

будет доказательством секвенции S в виде дерева.

($\Longleftarrow$) Пусть D — доказательство секвенции S в виде дерева. Построим линейные доказательства для всех секвенций S' дерева D. Построение будем вести обратной индукцией по высоте секвенции S' в дереве D. Начальные секвенции в дереве D будут линейными доказательствами. Если для всех секвенций $S_1, \ldots, S_m$ высоты $k+1$ уже построены линейные доказательства $L_1, \ldots, L_m$, то очевидно, что последовательность

$$L_1, \ldots, L_m, S'$$

будет линейным доказательством секвенции S' высоты k. □

Опр Схема секвенций H называется *доказуемой* в ИВ, если ее добавление к ИВ в качестве схемы аксиом не расширяет множество доказуемых секвенций. Ясно, что это эквивалентно тому, что все частные случаи схемы H доказуемы в ИВ.

Пример 1.3.2. Следующее дерево показывает доказуемость схемы $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$: [1])

$$\cfrac{\cfrac{\Phi \vdash \Phi}{\Phi, \Psi \vdash \Phi}\ \text{— правило 12} \qquad \cfrac{\cfrac{\Psi \vdash \Psi}{\Psi, \Phi \vdash \Psi}\ \text{— правило 12}}{\Phi, \Psi \vdash \Psi}\ \text{— правило 11}}{\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}\ \text{— правило 1.}$$

Опр Правило вывода называется *допустимым* в ИВ, если добавление его к исчислению ИВ не расширяет множество доказуемых секвенций. В частности, правила 1–12 ИВ допустимы в ИВ.

Конечная последовательность секвенций $S_0, \ldots, S_n$ называется *линейным квазивыводом секвенции S_n в* ИВ, если каждая входящая в нее секвенция является доказуемой в ИВ или получается из предыдущих по допустимому в ИВ правилу вывода. Дерево D называется *квазивыводом секвенции S в ИВ в виде дерева*, если всякая начальная секвенция D доказуема в ИВ, заключительной секвенцией является S, а переходы представляют собой применения допустимых в ИВ правил вывода.

Очевидно, что всякая секвенция, для которой существует линейный квазивывод или квазивывод в виде дерева, является доказуемой.

В дальнейшем под доказательством (квазивыводом) в исчислении ИВ мы будем понимать доказательство (квазивывод) в виде дерева. Это мы делаем для более наглядного представления доказательства, а также потому, что поиск доказательства данной секвенции в виде дерева существенно проще, чем поиск ее линейного доказательства.

Ясно, что если в правиле ИВ переставить секвенции над чертой, то полученное правило будет допустимым в ИВ. Так переделанные правила мы не будем различать с исходными правилами.

Для $\delta \in \{0, 1\}$ через Φ^δ будем обозначать формулу Φ, если $\delta = 1$, и формулу $\neg\Phi$, если $\delta = 0$.

Предложение 1.3.3 (***основные допустимые правила* ИВ**). *Следующие правила являются допустимыми в* ИВ:

а) $\dfrac{\Psi_1, \ldots, \Psi_n \vdash \Phi}{X_1, \ldots, X_m \vdash \Phi}$, где $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\} \subseteq \{X_1, \ldots, X_m\}$,

[1]) Вместо слов «применение правила k» будем писать короче — «правило k».

б) $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi; \Gamma, \Psi \vdash \mathrm{X}}{\Gamma \vdash \mathrm{X}}$, в) $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \mathrm{X}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \mathrm{X}}$,

г) $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma \vdash \neg\Phi}$, д) $\dfrac{\Gamma, \Phi^{\varepsilon} \vdash \Psi^{\delta}}{\Gamma, \Phi^{(1-\varepsilon)} \vdash \Psi^{(1-\delta)}}$, где $\varepsilon, \delta \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Для установления допустимости правила вывода достаточно построить дерево секвенций, у которого переходы будут применениями правил вывода ИВ, а начальными секвенциями будут начальные секвенции данного правила и также, возможно, некоторые доказуемые секвенции.

Дерево

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Phi \to \Psi} \quad \Gamma, \Phi \vdash \Phi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}$$

показывает допустимость правила

$$\text{а}') \ \dfrac{\Gamma, \Phi, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}.$$

Так как любую перестановку формул в последовательности можно осуществить, переставляя соседние формулы, то допустимость правила а) следует из допустимости правила а′) с помощью правил 11, 12.

Покажем еще допустимость правил г) и д), оставляя правила б) и в) читателю в качестве упражнения.

г). Воспользуемся доказуемостью схемы $\Gamma, \neg\neg\Phi, \neg\Phi \vdash \mathfrak{F}$, установить которую предлагаем читателю в качестве упражнения:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma, \Phi, \neg\neg\Phi \vdash \mathfrak{F}}}{\Gamma, \neg\neg\Phi, \Phi \vdash \mathfrak{F}}}{\Gamma, \neg\neg\Phi \vdash \Phi \to \mathfrak{F}} \quad \dfrac{\Gamma, \neg\neg\Phi, \neg\Phi \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma, \neg\neg\Phi \vdash \Phi}}{\Gamma, \neg\neg\Phi \vdash \mathfrak{F}}}{\Gamma \vdash \neg\Phi}.$$

Для доказательства допустимости правила д) мы воспользуемся установленной выше допустимостью правил а) и г), т.е. построим соответствующее дерево, у которого некоторые переходы будут применениями правила а) или г):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi^{\varepsilon} \vdash \Psi^{\delta}}{\Gamma, \Psi^{(1-\delta)}, \Phi^{\varepsilon} \vdash \Psi^{\delta}} \quad \dfrac{\Psi^{(1-\delta)} \vdash \Psi^{(1-\delta)}}{\Gamma, \Psi^{(1-\delta)}, \Phi^{\varepsilon} \vdash \Psi^{(1-\delta)}}}{\Gamma, \Psi^{(1-\delta)}, \Phi^{\varepsilon} \vdash \mathfrak{F}}}{\Gamma, \Psi^{(1-\delta)} \vdash \Phi^{(1-\varepsilon)}}.$$

□

Пример 1.3.4. Докажем секвенцию $\vdash Q_0 \vee \neg Q_0$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg Q_0 \vdash \neg Q_0}{\neg Q_0 \vdash Q_0 \vee \neg Q_0} \quad \neg(Q_0 \vee \neg Q_0) \vdash \neg(Q_0 \vee \neg Q_0)}{\neg(Q_0 \vee \neg Q_0), \neg Q_0 \vdash \mathfrak{F}}}{\neg(Q_0 \vee \neg Q_0) \vdash Q_0}}{\neg(Q_0 \vee \neg Q_0) \vdash Q_0 \vee \neg Q_0} \quad \neg(Q_0 \vee \neg Q_0) \vdash \neg(Q_0 \vee \neg Q_0)}{\neg(Q_0 \vee \neg Q_0) \vdash \mathfrak{F}}}{\vdash Q_0 \vee \neg Q_0}.$$

Замечание 1.3.5. Заметим, что приведенное выше дерево не является доказательством в ИВ, так как второй переход не является применением ни одного из правил. Однако ясно, что, дополнив это дерево применениями правил 11 и 12, можно получить доказательство. Вместо нескольких применений правил 11 и 12 можно применять допустимое правило а). В дальнейшем без оговорок будем пользоваться допустимыми правилами 1*–10*, которые получаются из основных правил 1–10 заменой вхождений Γ над чертой на $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, а Γ под чертой на Γ_{n+1} и добавлением условия $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\} \subseteq \{\Gamma_{n+1}\}$. Например, правило 6* будет таким:

$$\frac{\Gamma_1, \Phi \vdash \Psi; \Gamma_2, \mathrm{X} \vdash \Psi; \Gamma_3 \vdash \Phi \vee \mathrm{X}}{\Gamma_4 \vdash \Psi},$$

где $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\} \subseteq \{\Gamma_4\}$.

Ясно, что правило 6* получается из правила 6 с $\Gamma = \Gamma_4$ добавлением следующих применений правила а):

$$\frac{\Gamma_1, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma_4, \Phi \vdash \Psi}; \quad \frac{\Gamma_2, \mathrm{X} \vdash \Psi}{\Gamma_4, \mathrm{X} \vdash \Psi}; \quad \frac{\Gamma_3 \vdash \Phi \vee \mathrm{X}}{\Gamma_4 \vdash \Phi \vee \mathrm{X}}.$$

Упражнения

1. Установить доказуемость в ИВ следующих схем:

   а) $\Phi \vdash \neg\neg\Phi$;

   б) $\neg\neg\Phi \vdash \Phi$;

   в) $\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi \wedge \Phi$;

   г) $\Phi \vee \Psi \vdash \Psi \vee \Phi$;

   д) $\vdash \neg\mathfrak{F}$;

   е) $\mathfrak{F} \vdash \Phi$ для любого Φ.

2. Доказать допустимость в ИВ следующих правил:

   е) $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \neg\Phi}{\Gamma \vdash \mathfrak{F}}$; ж) $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma \vdash \Phi}$; з) $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \neg\Phi \vdash \mathfrak{F}}$.