Глава 1
ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1.1. Множества и слова

Под *буквой* мы понимаем знак, который рассматривается как целый, т. е. знак, части которого нас не интересуют. Букву будем называть также *символом.* [1] Про две данные (например, написанные) буквы мы можем говорить, что они одинаковы или что они различны. Например, все строчные буквы «а» в данной книге считаем одинаковыми. Одинаковыми мы считаем также все строчные буквы «а» в некотором рукописном тексте, хотя одинаковость двух букв в этом случае установить трудней, чем в предыдущем. Будет предполагаться, что для рассматриваемых двух конкретных букв мы всегда можем установить их одинаковость или различие. Если буквы a_1 и a_2 одинаковы, то будем писать $a_1 = a_2$.

Абстракция отождествления одинаковых букв дает нам понятие абстрактной буквы. В дальнейшем о двух одинаковых конкретных буквах a_1 и a_2 мы будем говорить как об одной и той же (абстрактной) букве a. При этом каждая из этих двух конкретных букв будет называться *представителем абстрактной буквы* a. [2]

Совокупность X некоторых объектов, которые будут называться *элементами* X, назовем *множеством* [3].

---

[1] Иногда слово «буква» будет иметь и обычный смысл, например, «латинская буква», «строчная буква».

[2] Следует при этом различать абстрактную букву, обозначаемую символом a, и сам символ a, который является обозначением или именем упомянутой абстрактной буквы.

[3] Как отмечалось во введении, такое определение, вообще говоря, может привести к противоречию. Однако это не должно пугать читателя, так как существование всех рассматриваемых в этой книге множеств можно вывести в рамках формальной системы, описанной в § 2.6, в которой невозможно прямо провести ни одно известное «парадоксальное» рассуждение о множествах.

Если a — элемент множества X, то пишем $a \in X$. Если любой элемент множества X является элементом множества Y, то множество X называется *подмножеством* множества Y и обозначается это так: $X \subseteq Y$. Если для множеств X и Y имеем $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то будем считать множества X и Y равными и писать $X = Y$. Таким образом, множество полностью определено своими элементами. В частности, существует только одно множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество будем называть *пустым* и обозначать символом $\varnothing$. Если для множества X не имеет место $a \in X$, то будем писать $a \notin X$.

Буквами i, j, k, l, m, n, p, r, s, возможно с индексами, будем обозначать натуральные числа. Множество всех натуральных чисел будем обозначать буквой ω. Если $a_1 \in X, \ldots, a_n \in X$, то будем писать $a_1, \ldots, a_n \in X$. Если X — множество, $a_1, \ldots, a_n \in X$ и любой элемент X равен одному из $a_1, \ldots, a_n$, то X называем *конечным множеством* и пишем $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$. [1] Если $\varphi(a)$ — некоторое условие на объект a, а X — множество, то через $\{a \in X \mid \varphi(a)\}$ или $\{a \mid \varphi(a), a \in X\}$ обозначаем множество, содержащее в качестве элементов те и только те элементы $a \in X$, которые удовлетворяют условию $\varphi(a)$. Например, $\{n \in \omega \mid n = 2k$ для некоторого $k \in \omega\}$ является множеством всех четных натуральных чисел.

Множество абстрактных букв называется *алфавитом*. Букву, являющуюся элементом алфавита A, будем называть *буквой алфавита* A.

Конечный ряд написанных друг за другом конкретных букв называется *конкретным словом*. В частности, каждая конкретная буква является конкретным словом. Если каждая из букв конкретного слова α является представителем некоторой буквы алфавита A, то будем говорить, что α является *словом в алфавите* A. Мы допускаем также случай, когда слово α не содержит ни одной конкретной буквы. Такое слово будем называть *пустым* и обозначать через Λ. Будем говорить, что два конкретных слова $a_1 \ldots a_n$ и $b_1 \ldots b_k$ алфавита A *равны*, и писать $a_1 \ldots a_n = b_1 \ldots b_k$, если $n = k$ и $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$. Все пустые слова считаем равными. Если $a_1 \ldots a_n$ — конкретное слово, состоящее из n букв $a_1, \ldots, a_n$ алфавита A, то число n называется *длиной* этого слова. Длиной пустого слова будет число 0.

Применяя абстракцию отождествления, будем говорить о двух равных конкретных словах α_1, α_2 как об одном и том же (*абстрактном*) слове α. При этом эти два конкретных слова будем называть *представителями слова* α. Из определения равенства конкретных слов получаем, что абстрактное слово α можно определить как конечный ряд абстрактных букв такой, что каждый представитель слова α есть

[1] Отметим, что при этом попарное различие элементов $a_1, \ldots, a_n$ не предполагается. В частности, $\{\varnothing\} = \{\varnothing, \varnothing, \varnothing\}$.

ряд представителей соответствующих абстрактных букв. Количество абстрактных букв в этом ряду будем называть *длиной абстрактного слова* α. Пустое абстрактное слово будем обозначать той же буквой Λ, что и конкретные пустые слова.

Для абстрактных слов α и β определяем абстрактное слово $\alpha\beta$ как такое абстрактное слово, все представители которого получаются приписыванием к некоторому представителю слова α некоторого представителя слова β. Абстрактное слово $\alpha\beta$ будем называть *соединением* абстрактных слов α и β; абстрактное слово α будем называть *началом* слова $\alpha\beta$. Аналогично определяется соединение $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ абстрактных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

В дальнейшем под *словом* мы понимаем абстрактное слово. Очевидно, что для любых слов α, β имеем $\Lambda\alpha = \alpha\Lambda = \alpha$ и $\alpha\Lambda\beta = \alpha\beta$.

Слово β алфавита A называется *подсловом* слова α алфавита A, если $\alpha = \gamma\beta\delta$ для некоторых слов γ, δ. В частности, любое начало слова α будет подсловом α. Может оказаться, что $\alpha = \gamma\beta\delta$ и $\alpha = \gamma_1\beta\delta_1$ для различных слов γ, γ_1. В этом случае говорим о различных *вхождениях* подслова β в α. Таким образом, вхождением подслова β в слово α называется слово β вместе с местом его расположения в слове α. Вхождение подслова β в слово α можно изображать так: $\gamma * \beta * \delta$, где $*$ — символ, не принадлежащий алфавиту A. В частности, если $\alpha = \gamma\beta\delta = \gamma_1\beta\delta_1$ и $\gamma \neq \gamma_1$, то мы имеем два различных вхождения $\gamma * \beta * \delta$ и $\gamma_1 * \beta * \delta_1$ подслова β в слово α. Если для вхождения $\gamma_0 * \beta * \delta_0$ подслова β в α слово γ_0 (слово δ_0) имеет наименьшую длину среди всех слов γ (слов δ), для которых $\alpha = \gamma\beta\delta$, то $\gamma_0 * \beta * \delta_0$ называется *первым* (*последним*) *вхождением* β в α.

Вхождением буквы a в слово α называется вхождение в α слова, состоящего из одной буквы a. Если существует вхождение буквы a в слово α, то говорим, что *буква a входит в α*. Пусть $\gamma * \beta * \delta$ — вхождение слова β в α. Если $\alpha' = \gamma\beta'\delta$ для некоторого слова β', то будем говорить, что слово α' получается из α *заменой вхождения $\gamma * \beta * \delta$ подслова β на слово β'*.

Ряд $X_1, \ldots, X_n$ некоторых объектов X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, будем называть *последовательностью* или *кортежем*, а число n — *длиной* этой последовательности. Объекты X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, будут называться *членами* или *элементами* последовательности $X_1, \ldots, X_n$. Мы предполагаем, что по записи последовательности ее члены и их порядок восстанавливаются однозначно. Для этого нам необходимо разделять члены последовательности, например, с помощью запятой. Если $n = 0$, то ряд $X_1, \ldots, X_n$ будем считать *пустой последовательностью* и обозначать его тем же символом $\varnothing$, что и пустое множество. Иногда последовательность $X_1, \ldots, X_n$ будем обозначать через $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$. Если $X_1, \ldots, X_n$ — множества, то множество всех кортежей $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, где $a_1 \in X_1, \ldots, a_n \in X_n$, будем обозначать через $X_1 \times \ldots \times X_n$. Если $X_1 = X_2 = \ldots = X_n$, то множество $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ будем обозначать также через X_1^n. Последовательность из двух (трех и т. д.) членов будем называть *парой* (*тройкой* и т. д.). Последовательность из n элементов будем называть *n-кой.*

Отображением f множества X в множество Y называется соответствие, сопоставляющее каждому элементу $a \in X$ элемент $f(a) \in Y$, называемый *значением* отображения f на элементе a. Ясно, что отображение f множества X в множество Y однозначно определяется множеством $\{\langle a, f(a)\rangle \in X \times Y \mid a \in X\}$. Это множество (называемое иногда *графиком* f) мы будем отождествлять с отображением f. Если f — отображение X в Y, то пишем $f : X \to Y$. Если X — множество, то всякое отображение $f : X^n \to X$ будем называть *n-местной операцией на* X, а n — *местностью* операции f. Если $f : Y \to X$ и $Y \subseteq X^n$, то f будет называться *частичной n-местной операцией на* X с областью определения Y.

Для того чтобы задать множество X, достаточно указать, для каких объектов a истинно отношение $a \in X$. Поэтому следующие выражения будут однозначно определять по двум множествам X и Y новые множества $X \cap Y$, $X \cup Y$ и $X \setminus Y$, называемые соответственно *пересечением*, *объединением* и *разностью* множеств X и Y:

а) $a \in X \cap Y \iff (a \in X$ и $a \in Y)$;

б) $a \in X \cup Y \iff (a \in X$ или $a \in Y)$;

в) $a \in X \setminus Y \iff (a \in X$ и $a \notin Y)$.

Предложение 1.1.1. *Операции пересечения и объединения удовлетворяют следующим равенствам для любых множеств X, Y и Z:*

$$\left.\begin{array}{l} 1\,\text{а})\, X \cap Y = Y \cap X \\ 1\,\text{б})\, X \cup Y = Y \cup X \end{array}\right\} \text{— \textit{коммутативность};}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\,\text{а})\, X \cap X = X \\ 2\,\text{б})\, X \cup X = X \end{array}\right\} \text{— \textit{идемпотентность};}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\,\text{а})\, (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) \\ 3\,\text{б})\, (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \end{array}\right\} \text{— \textit{ассоциативность};}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4\,\text{а})\, X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\ 4\,\text{б})\, X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \end{array}\right\} \text{— \textit{дистрибутивность}.}$$

Проверка этих равенств не представляет труда. Докажем, например, 4б. Пусть элемент a принадлежит левой части равенства. Тогда $a \in X$ или $a \in Y \cap Z$, поэтому $a \in X \cup Y$ и $a \in X \cup Z$, т. е. a принадлежит правой части. Если $a \in X \cup Y$ и $a \in X \cup Z$, то $a \in X$ или $a \in Y \cap Z$. Следовательно, a принадлежит левой части равенства (4б). □

Если X — множество, то множество всех его подмножеств будем называть *множеством-степенью* X и обозначать через $P(X)$.

Пусть J — непустое множество и X_i для $i \in J$ — некоторые множества. *Объединением* $\bigcup\limits_{i\in J} X_i$ и *пересечением* $\bigcap\limits_{i\in J} X_i$ множеств X_i, $i \in J$, будем называть множества, определенные следующим образом:

$$a \in \bigcup_{i\in J} X_i \iff (a \in X_i \text{ для некоторого } i \in J),$$

$$a \in \bigcap_{i\in J} X_i \iff (a \in X_i \text{ для всех } i \in J).$$

Для множества X через $\bigcup X$ и $\bigcap X$ будут обозначаться соответственно множества $\{a \mid a \in b$ для некоторого $b \in X\}$ и $\{a \mid a \in b$ для всех $b \in X\}$.

Упражнения

1. Сколько различных вхождений имеет пустое слово Λ в слово длины n?
2. Показать, что число различных подслов слова α длины n не превышает $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$.
3. Для каких слов α длины n число различных подслов α равно $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$?
4. Пусть множества $X_0, \ldots, X_{n+1}$ являются подмножествами некоторого множества Y. Обозначим через $\overline{X_i}$ множество $Y \setminus X_i$. Показать, что

   а) $\overline{\bigcup\limits_{i\leqslant n} X_i} = \bigcap\limits_{i\leqslant n} \overline{X_i}$; б) $\overline{\bigcap\limits_{i\leqslant n} X_i} = \bigcup\limits_{i\leqslant n} \overline{X_i}$; в) $X_0 \cap X_1 = X_0 \setminus (X_0 \setminus X_1)$.

§ 1.2. Язык исчисления высказываний

Опр Будем говорить, что задано *исчисление* I, если заданы следующие четыре множества:

а) алфавит $A(I)$;

б) множество $E(I)$ слов алфавита $A(I)$, называемое *множеством выражений исчисления* I;

в) множество $Ax(I)$ выражений исчисления I, называемое *множеством аксиом исчисления* I;

г) множество $R(I)$ правил вывода исчисления I.